## Domácí úloha č.9

1. Určete matici přechodu od báze $\alpha = \{(-3,0,-3)^T, (-3,2,-1)^T, (1,6,-1)^T\}$ k bázi $\beta = \{(-6,-6,0)^T, (-2,-6,4)^T, (-2,-3,7)^T\}$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{17}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right]$$

2. Určete matici přechodu od báze $e = (1, x, x^2)$ k bázi $u = (1, x+1, 1-x^2)$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

3. Určete matici přechodu od báze $u = ((4,-6)^T, (1,-1)^T)$ k bázi $v = ((1,0)^T, (-1,5))$ a od báze $v$ k bázi $u$.

$$\left[A_{v,u} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\right]$$
$$\left[A_{u,v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right]$$

4. Rozhodněte, zda je $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1)$ lineární zobrazení.

[ano]

5. Rozhodněte, zda je $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $L((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$ lineární zobrazení.

[ano]

6. Ověřte, zda zobrazení $L$ je lineárním zobrazením a napište matici, kterou je reprezentováno.

$$L(u) = \begin{pmatrix} u_1 + 3u_2 + 2u_3 \\ 5u_1 + u_2 + 6u_3 \\ 2u_2 + u_3 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

7. Pro zadané lineární zobrazení nalezněte jeho jádro a obraz:
$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $L((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1)$

$[Ker(L) = \{(0,0,0,0)^T\}]$
$[Im(L) = Span\langle (1,0,1,1)^T, (1,1,0,0)^T, (0,1,1,0)^T \rangle]$

8. Pro zadané lineární zobrazení nalezněte jeho jádro a obraz:
$L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $L((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, 5x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4)$

$$[Ker(L) = Span\langle(-7, 1, 11, 0)^T, (-3, 0, 5, 1)^T\rangle]$$
$$[Im(L) = Span\langle(3, 5, 2)^T, (-1, 2, 3)^T\rangle]$$

9. Určete matici lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1, 0)$ v bázích $\alpha = \{(1, 3)^T, (-2, 4)^T\}$, $\beta = \{(1, 1, 1)^T, (2, 2, 0)^T, (3, 0, 0)^T\}$

$$\left[A_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}\right]$$

10. Nechť $A_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je matice lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ v bázích $\alpha = \{(1, 1, 0)^T, (1, -2, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$, $\beta = \{(2, -1)^T, (0, 1)^T\}$. Nalezněte matici tohoto lineárního zobrazení ve standardních bázích.

$$\left[A_{e,e} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

11. Napište matici $A$ reprezentující lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$L(u) = 2u_1v_1 - (u_1 + u_2)v_2$, kde $u = (u_1, u_2)^T$ a $v_1 = (1, 2, -1)^T, v_2 = (1, 0, 1)^T$

   (a) ve standardních bázích $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

   (b) v bázích $\alpha = ((1, 1)^T, (0, 1)^T)$ a $\beta((2, 1, 1)^T, (1, 2, -1)^T, (0, 0, 1)^T)$

$$\left[\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

12. Je dána matice zobrazení ve standardní bázi. Určete matici tohoto zobrazení v bázi $v$.
$A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\left[A_v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 2 & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & -2 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}\right]$$