1. Zápočtová písemka (MB101 Matematika I)
19.10.2011 skupina 04

1. ÚLOHA

   Kolik trojciferných čísel lze zapsat z cifer 2,4,6,8, mohou-li se cifry opakovat?

   Řešení

   Záleží na pořadí cifer, mohou se opakovat, tedy použijeme variace s opakováním. Hledáme trojciferná čísla tj., $k = 3$ a máme k dispozici čtyři cifry tj., $n = 4$.

$$V'(3,4) = 4^3 = 64$$

2. ÚLOHA

   V bedně je 30 žárovek, z nichž jsou 3 vadné. S jakou pravděpodobností bude mezi 5 náhodně vybranými žárovkami nejvýše jedna vadná?

   Řešení

   Nejvýše jedna vadná znamená, že buď nebude vadná žádná nebo bude vadná jedna. Počet všech možností, jak vybrat 5 žárovek z 30 možných je $\binom{30}{5}$. Z 27 dobrých žárovek vybereme 5 dobrých $\binom{27}{5}$ způsoby. Dále 4 dobré žárovky z 27 dobrých a jednu vadnou ze tří vadných žárovek vybereme $\binom{27}{4}\binom{3}{1}$. Pravěpodobnost je tedy

$$P = \frac{\binom{27}{5} + \binom{27}{4}\binom{3}{1}}{\binom{30}{5}} = \frac{190}{203}.$$

3. ÚLOHA

   Na stole jsou 2 mísy s koláči. V první míse je 12 tvarohových koláčů a 8 ořechových koláčů. V druhé míse je 13 tvarohových a 12 ořechových koláčů. Náhodně ochutnám jeden koláč. Jaká je pravděpodobnost, že mnou ochutnávaný koláč bude ořechový?

   Řešení

   Jedná se o úlohu na cekovou pravděpodobnost. Označíme si $P(O)$ pravděpodobnost výběru ořechového koláče, dále M_1 ozn. jev výběru ořechového koláče z první mísy a M_2 jev výběru ořechového koláče z druhé mísy. Tedy $P(M_1) = P(M_2) = \frac{1}{2}$, $P(O, M_1) = \frac{8}{20}$, $P(O, M_2) = \frac{12}{25}$. Pravděpodobnost výběru ořechového koláče je tedy

$$P(O) = P(O, M_1)P(M_1) + P(O, M_2)P(M_2) = \frac{11}{25}$$

4. ÚLOHA

   Úsečka AB je dána body $A = [2, 6]$ a $B = [-2, 6]$. Otočte úsečku AB o úhel $\frac{\pi}{4}$ v záporném smyslu kolem bodu [1,1].

   Řešení

   Rotace kolem bodu $P = O + w$ různého od počátku O napíšeme jako (viz. skripta)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\varphi \cdot (v - w) + w = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x - x(w)) - \sin\varphi(y - y(w)) + x(w) \\ \sin\varphi(x - x(w)) + \cos\varphi(y - y(w)) + y(w) \end{pmatrix}.$$

   Rotujeme o úhel $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ okolo bodu $[1, 1]$. Dosadíme do matice, tedy

$$A' = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4})(2-1) - \sin(-\frac{\pi}{4})(6-1) + 1 \\ \sin(-\frac{\pi}{4})(2-1) + \cos(-\frac{\pi}{4})(6-1) + 1 \end{pmatrix}_{A=[2,6]} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} + 1 \\ 2\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4})(-2-1) - \sin(-\frac{\pi}{4})(6-1) + 1 \\ \sin(-\frac{\pi}{4})(-2-1) + \cos(-\frac{\pi}{4})(6-1) + 1 \end{pmatrix}_{B=[-2,6]} = \begin{pmatrix} -3\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ 3\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 4\sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$$