7. Úkol - Vektorové prostory a lineární zobrazení

1. ÚLOHA

   Ověřte, zda jsou následující množiny vektorovým prostorem

   (a) $V = \{(x,y)\}$ s operacemi sčítání a násobení skalárem definovanými $(x,y) + (\tilde{x},\tilde{y}) = (x + \tilde{x} + 1, y + \tilde{y} + 1)$ a $k \cdot (x,y) = (k \cdot x, k \cdot y)$

   (b) Množina všech matic 2×2 tvaru $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ se standardními operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem.

2. ÚLOHA

   Zjistěte, zda jsou vektory lineárně závislé či lineárně nezávislé.

   (a) $(1,2,-1,1), (2,-1,4,10), (1,0,3,-5), (2,5,2,2)$

   (b) $(1,0,2i), (i,2-i,1+i), (1-i,i,-1)$

3. ÚLOHA

   Zjistěte, zda je množina M podprostorem vektorového prostoru

   (a) $\mathbb{R}^3$, jestliže $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y \geq 0\}$

   (b) $Mat_n(\mathbb{R})$, jestliže $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_n(\mathbb{R}); a + b + c + d = 0 \right\}$

4. ÚLOHA

   Určete λ tak, aby vektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $u = (1,1,2)$, $v = (3,2,4)$, $w = (-2,1,\lambda)$ byly lineárně závislé.

5. ÚLOHA

   Vyberte z vektorů a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 bázi vektorového podprostoru $Q = L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ prostoru $\mathbb{R}^4$ a ostatní vektory z této skupiny vyjádřete jako lineární kombinaci prvků báze.

   (a) $a_1 = (0,0,0,0), a_2 = (3,4,-1,2), a_3 = (1,1,-1,-2), a_4 = (4,1,-2,3), a_5 = (5,2,-3,1)$

   (b) $a_1 = (7,-6,-7,0), a_2 = (4,-1,15,17), a_3 = (3,-2,3,4), a_4 = (4,-3,1,3), a_5 = (2,-1,3,5)$

6. ÚLOHA

   Zjistěte, zda jsou polynomy $1 + x$, $1 - x$; $2 + x - x^2$ lineárně závislé v množině $\mathbb{R}^2[x]$ všech polynomů v proměnné x nad polem $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 2.

7. ÚLOHA

   Najděte bázi vektorového podprostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4 = L(u_1, u_2, u_3)$ tvořeného vektory $u_1 = (0, 1-3, 4)$, $u_2 = (2,2,2,2)$, $u_3 = (1,-1,3,7)$, $u_4 = (1,4,-4,-1)$, jejímž jedním vektorem je $v = (3,11,1,5)$.

8. ÚLOHA

Najděte nějakou bázi a určete dimenzi lineárního obalu množiny M ve vektorovém prostoru V.

(a) $V = \mathbb{R}^4$; $M = \{(1,2,3,4), (-2,-3,-4,-5), (3,4,5,6), (-4,-5,-6,-7), (5,6,7,8)\}$

(b) $V = \mathbb{R}^3[x]$, $M = \{1 + x + x^3, 1 - x, 2x - x^2, 2 - x^2, 2x + x^2 + x^3\}$

9. ÚLOHA

Doplňte množinu $M = \{(-1,1,0,0), (0,-1,1,0), (0,0,-1,1)\}$ na bázi $\mathbb{R}^4$.

10. ÚLOHA

Najděte souřadnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru V:

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1,2,3); \alpha = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

(b) $V = Mat_2(\mathbb{R})$; $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

11. ÚLOHA

V $\mathbb{R}^3$ jsou dány báze $\alpha = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ a $\beta = \{(-1,1,0,), (1,1,0), (0,0,1)\}$. Určete matici přechodu od báze α k bázi β a matici přechodu od báze β k bázi α. Dále určete souřadnice vektoru x_α, jehož souřadnice (v bázi α) jsou $x_\alpha = (-1,3,0)^T$ v bázi β a souřadnice vektoru y_β, jehož souřadnice (v bázi β) jsou $y_\beta = (2,4,7)^T$ v bázi α.

12. ÚLOHA

Nechť $\alpha = \{(1,0,-1,2,3), (-2,1,4,-3,1)\}$, a $\beta = \{(0,1,2,1,7), (-1,2,5,0,11)\}$ jsou dvě báze podprostoru P vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$. Určete matici přechodu

(a) od báze α k bázi β,

(b) od báze β k bázi α.

13. ÚLOHA

Je zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární? Jestliže je, najděte také Ker$f$ a Imf.

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1, x_2)$

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)$

(c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, -2x_2)$.

14. ÚLOHA

Určete matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které je dáno předpisem $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1)$ v bázích α a β, jestliže

(a) $\alpha = e_3$, $\beta = e_2$

(b) $\alpha = \{(1,2,0), (-2,1,0), (3,1,-1)\}$, $\beta = \{(2,1), (0,2)\}$