Vektorové prostory a lineární zobrazení

1. ÚLOHA

   Ověřte, zda množina $\mathbb{R}^+$ je vektorovým prostorem, definujeme-li sčítání a násobení reálným číslem

   (a) standardně

   (b) $u \bigoplus v = u \cdot v \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^+$

   $\lambda \bigodot u = u^\lambda \qquad \forall u \in \mathbb{R}^+, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2. ÚLOHA

   Zjistěte, zda jsou vektory $(1,0,1,1), (0,1,2,3), (1,2,3,0), (1,1,0,2)$ lineárně závislé či lineárně nezávislé.

3. ÚLOHA

   Zjistěte, zda je množina $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2| = |x_3|\}$ podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

4. ÚLOHA

   Určete bázi a dimenzi podprostoru $L \subseteq \mathbb{R}^3$, jestliže $L = \langle (1,2,3), (0,1,1), (-1,-1,1), (0,2,1) \rangle$.

5. ÚLOHA

   Zjistěte, zda jsou prvky $x^2 + 2x + 3$, $x + 1$, $x - 1$ vektorového prostoru všech polynomů lineárně závislé či lineárně nezávislé.

6. ÚLOHA

   Najděte bázi vektorového prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tvořeného vektory $x_1 = (1,2,0,1)$, $x_2 = (-2,1,1,0)$, $x_3 = (-1,8,2,4)$, $x_4 = (1,12,2,5)$, jejímž jedním vektorem je $y = (3,11,1,5)$.

7. ÚLOHA

   Zapište vektor $\bar{x} = (1,2,3)$ v souřadnicích báze

   (a) kanonické báze

   (b) $B = \{(1,0,1), (1,2,0), (0,-1,1)\}$.

8. ÚLOHA

   Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ s bázemi $B_M = \{(1,2), (1,1)\}$ a $B_N = \{(-1,1), (2,0)\}$.

   (a) Určete matici přechodu od báze B_M k bázi B_N.

   (b) Vyjádřete vektor $\bar{x}_{B_M} = (-3,2)_{B_M}$ v bázi B_N.

9. ÚLOHA

   Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

definuje lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Určete bázi a dimenzi $\mathrm{Ker}(\psi)$, $\mathrm{Im}(\psi)$ a $\mathrm{R}(\psi)$.

10. ÚLOHA

Je zobrazení f, které je dáno předpisem $f(ax^2 + bx + c) = abx + c$, lineární?

11. ÚLOHA

Mějme dáno zobrazení Φ předpisem $\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, x_1 + 2x_3)$. Zjistěte, zda je toto zobrazení lineární, v případě, že ano, nalezněte jeho jádro a obraz. Dále určete dimenzi těchto podprostorů.