

Opravný test MB101

Varianta A

Příklad 1: Čtete pozorně (rozlišitelné/nerozlišitelné)! Uvažte, že lze umístit více koulí do jedné přihrádky. Kolika způsoby lze rozdělit (a) 3 rozlišitelné koule do 2 rozlišitelných přihrádek? (b) 3 nerozlišitelné koule do 2 rozlišitelných přihrádek? (c) 3 rozlišitelné koule do 2 nerozlišitelných přihrádek? (d) 3 nerozlišitelné koule do 2 nerozlišitelných přihrádek?

Příklad 2: Uveďte příklad relace na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která (a) není reflexivní, (b) je reflexivní a současně není symetrická, (c) je symetrická a současně není tranzitivní. Příklady uveďte buď výčtem prvků relace nebo tabulkou nebo obrázkem (grafem) relace s orientovanými šipkami.

Příklad 3: Metodou Gaussovy eliminace vyřešte následující lineární systém a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $a \in \mathbb{R}$ (tj. pro které hodnoty parametru a řešení neexistuje nebo existuje a tato řešení určete:

$$\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= a \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 2 \\ 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Příklad 4: Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete determinant matice A . Rozhodněte, jestli je matice A regulární. Pokud ano, určete determinant inverzní matice k matici A .

Příklad 5: Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Určete nějakou bázi a dimenzi jádra matice A . Určete vektor v v jádru matice A , který je nejbližší k vektoru $w = (2 \ 2 \ 0 \ 4)^T$ a tuto nejmenší vzdálenost vektoru w od vektoru v (tj. od jádra matice A) spočítejte.

Příklad 6: Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (vlk–zajíc) je vztah mezi počtem vlků (V_k) a počtem zajíců (Z_k) v daném a následujícím období následovný:

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= 0.6V_k + 0.2Z_k, \\ Z_{k+1} &= -0.4V_k + 1.2Z_k. \end{aligned}$$

Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska za podmínky, že počáteční počet vlků a zajíců je $V_0 = 50$ a $Z_0 = 210$.

Opravný test MB101

Varianta B

Příklad 1: Čtete pozorně (rozlišitelné/nerozlišitelné)! Uvažte, že lze umístit více koulí do jedné přihrádky. Kolika způsoby lze rozdělit (a) 2 rozlišitelné koule do 3 rozlišitelných přihrádek? (b) 2 nerozlišitelné koule do 3 rozlišitelných přihrádek? (c) 2 rozlišitelné koule do 3 nerozlišitelných přihrádek? (d) 2 nerozlišitelné koule do 3 nerozlišitelných přihrádek?

Příklad 2: Uveďte příklad relace na množině $\{a, b, c, d\}$, která (a) není reflexivní, (b) je reflexivní a současně není symetrická, (c) je symetrická a současně není tranzitivní. Příklady uveďte buď výčtem prvků relace nebo tabulkou nebo obrázkem (grafem) relace s orientovanými šipkami.

Příklad 3: Metodou Gaussovy eliminace vyřešte následující lineární systém a proveďte diskusi řešení vzhledem k hodnotám parametru $a \in R$ (tj. pro které hodnoty parametru a řešení neexistuje nebo existuje a tato řešení určete:

$$\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= a \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= -2 \\ 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Příklad 4: Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete determinant matice A . Rozhodněte, jestli je matice A regulární. Pokud ano, určete determinant inverzní matice k matici A .

Příklad 5: Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete nějakou bázi a dimenzi jádra matice A . Určete vektor v v jádru matice A , který je nejbližší k vektoru $w = (0 \ 2 \ -2 \ 4)^T$ a tuto nejmenší vzdálenost vektoru w od vektoru v (tj. od jádra matice A) spočítejte.

Příklad 6: Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (vlk–zajíc) je vztah mezi počtem vlků (V_k) a počtem zajíců (Z_k) v daném a následujícím období následovný:

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= 0.6V_k + 0.3Z_k, \\ Z_{k+1} &= -0.4V_k + 1.3Z_k. \end{aligned}$$

Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska za podmínky, že počáteční počet vlků a zajíců je $V_0 = 20$ a $Z_0 = 90$.