Př. 1 (4 body)

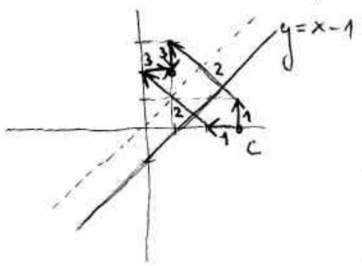
A ... průnik $p: \begin{array}{l} x = t \\ y = 2+3t \end{array}$, $q: 2x + y = -3$

$\rightarrow 2\cdot t + (2+3t) = -3 \rightarrow 5t = -5 \Rightarrow t = -1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 + 3\cdot(-1) = -1 \end{array}\right\} \underline{A = [-1,-1]}$

B ... kolmá projekce $[2,-2]$ na osu y → vynulujeme x-ovou souřadnici

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{B = [0,-2]}$

C ... zrcadlení $[3,0]$ podle $y = x - 1$



→ lze řešit různými způsoby, ale u všech budeme zrcadlit podle přímky $y = x$ (prochází počátkem)

$\xrightarrow{1}$ posunutí přímky do počátku ⇒ od x-ové souřadnice odečteme 1, nebo k y-ové souřadnici přičteme 1

$\xrightarrow{2}$ zrcadlení podle $y = x$ $(\alpha = \pi/4)$

$\xrightarrow{3}$ posunutí zpět

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & \sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & -\cos\pi/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{nebo: } -\|- \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ $\underline{C = [1,2]}$

→ viditelnost: $X = [-1,1]$

$\vec{XA} = A - X = (0,-2)$

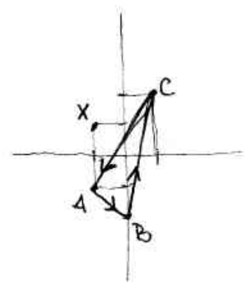
$\vec{XB} = B - X = (1,-3)$

$\vec{XC} = C - X = (2,1)$

$$CA: \begin{array}{cc} \vec{XC} & \vec{XA} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \rightarrow \underline{\text{vidíme}}$$

$$AB: \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 > 0 \rightarrow \underline{\text{nevidíme}}$$

$$BC: \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 > 0 \rightarrow \underline{\text{nevidíme}}$$



Př. 2 (4 body)

$R = \{[a,1],[b,1],[c,2],[d,3]\} \subseteq A \times B$

$a \to 1$
$b \to 1$
$c \to 2$
$d \to 3$

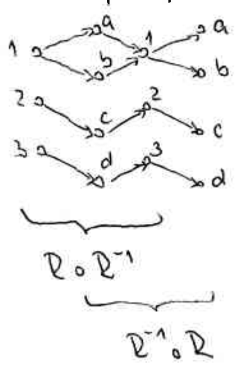
→ zobrazení ✓ (z každého prvku A jde jen 1 šipka = každý vzor má právě 1 obraz)

→ surjektivní ✓ (jsou použity ∀ prvky z A i B)

→ injektivní × (každý obraz nemá jen právě jeden vzor: $a \to 1 \wedge b \to 1$)

} není bijekce $(= S \wedge I)$

$R^{-1} = \{[1,a],[1,b],[2,c],[3,d]\} \subseteq B \times A$



$R \circ R^{-1} = \{[1,1],[2,2],[3,3]\} \to R, S, AS, T \Rightarrow E, U$

$R^{-1} \circ R = \{[a,a],[a,b],[b,a],[b,b],[c,c],[d,d]\}$

$\to R, S, T \Rightarrow E$

Př. 3 (4 body)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 1 & 1-a & 0 & b-3 \\ 1 & 1-a & a & 2b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & a+2 & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a & b+2 \end{array}\right)$$

→ žádné → $a = 0 \wedge b \neq -2$ → dostaneme řádek $(0 \quad 0 \quad 0 \mid c \neq 0)$

→ jediné → $a \neq 0$

$\to z = \dfrac{b+2}{a}$

$y = -3 - 2z = -3 - 2 \cdot \dfrac{b+2}{a} = \dfrac{-3a-2b-4}{a}$

$x = b + 2z + ay = b + \dfrac{2b+4}{a} + (-3a-2b-4) = \dfrac{-3a^2-4a-ab+2b+4}{a}$

$\Rightarrow \left\{\left(\dfrac{-3a^2-4a-ab+2b+4}{a}, \dfrac{-3a-2b-4}{a}, \dfrac{b+2}{a}\right)\right\}$

→ nekonečně mnoho → $a = 0 \wedge b = -2$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \to \left.\begin{array}{l} z = t \\ y = -3 - 2z = -3 - 2t \\ x = -2 + 2z = -2 + 2t \end{array}\right\} \{(-2+2t, -3-2t, t), t \in \mathbb{R}\}$$

Př. 4 (3 body)

→ jedno ze spousty možných řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -15 & -11 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -15 & -11 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-1)^{2+2} \left| -15 \right| = 2 \cdot 3 \cdot 15 = \underline{\underline{90}}$$