Skupina A

*2.***samostatná** *písemná práce z MB101. Na řešení máte 40 minut. Na každý papír se prosím čitelně podepište a napište svou skupinu. Pracujte pozorně. Pokud něčemu v zadání nerozumíte, zeptejte se. Přeji Vám hodně štěstí!!!*

Příklad č. 1: Zjistěte pro které hodnoty parametrů a, b má soustava v $\mathbb{R}$

1. právě 1 řešení (nepočítejte ho),
2. více než jedno řešení (napište tvar těchto řešení),
3. žádné řešení.

$$\begin{aligned} x + ay - az &= -3 \\ x + (a-1)y - (a+3)z &= -5 \\ x + (a+1)y + 2z &= b-1. \end{aligned}$$

Řešení. Nejprve sestavíme matici soustavy, kterou následně upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & -3 \\ 1 & a-1 & -a-3 & -5 \\ 1 & a+1 & 2 & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & b \end{array}\right)$$

Nyní již rozhodujeme o počtu řešení na základě toho, jak bude vypadat poslední řádek:

1. Právě jedno řešení dostaneme, když v posledním řádku bude před lomítkem nenulový prvek, tedy odtud dostáváme, že $a \neq 1$.
2. Nekonečně mnoho řešení bude soustava mít, když v posledním řádku budou samé nuly, tedy odtud dostáváme $a = 1$ a $b = 0$. Řešení pak má tvar $z = p$, $y = 2 - 3p$, $x = -5 + 4p$.
3. Soustava nebude mít žádné řešení, když na levé straně v posledním řádku budou nuly a na pravé straně nenulový prvek, tedy pak $a = 1$ a $b \neq 0$

Příklad č. 2: Z následujících vektorů libovolně vyberte podmnožinu s maximálním počtem lineárně nezávislých vektorů:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\5\\1\end{pmatrix}$$

Řešení. Každý z vektorů má 4 souřadnice a proto bude maximální množina lineárně nezávislých vektorů, utvořená z těchto vektorů, obsahovat nanejvýš 4 vektory. Na základě definice lineární nezávislosti řešíme následující soustavu:

$$\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\1&4&2&2&3\\1&1&3&1&5\\1&2&4&2&1\end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&1&1&0&2\\0&0&4&-1&8\\0&0&0&1&-6\end{pmatrix}$$

Matici jsme upravili na schodovitý tvar a je vidět, že tyto vektory jsou lineárně závislé. Vybíráme z nich tedy ty vektory, které mají ve svém sloupci vedoucí prvek řádku matice. Tedy v našem případě 1.-4. vektor.

Příklad č. 3: Určete hodnost matice A a v případě, že existuje, nalezněte inverzní matici:

$$A=\begin{pmatrix}2&-8&-6\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve ověříme hodnost tak, že matici upravíme na schodovitý tvar a zjistíme počet lineárně nezávislých řádků:

$$\begin{pmatrix}2&-8&-6\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-5&-3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Odtud plyne, že hodnost matice je 3 a existuje tedy její inverzní matice. Tu vypočteme na základě úpravy následující blokové matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-8&-6&1&0&0\\1&-5&-3&0&1&0\\-1&6&4&0&0&1\end{array}\right)\sim\ldots\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&3\\0&1&0&\frac{1}{2}&-1&0\\0&0&1&\frac{-1}{2}&2&1\end{array}\right)$$

Na pravé straně za lomítkem máme hledanou inverzní matici.

Příklad č. 4: Dvěma různými způsoby vypočtěte determinant matice B

$$B=\begin{pmatrix}6&-2&8\\-1&3&-2\\2&4&1\end{pmatrix}$$

Řešení. Nejjednodušší je použít Sarrusovo pravidlo. Další možný způsob je pomocí EŘO nebo Laplaceova rozvoje. Výsledek je -8.