Skupina B

*2.***samostatná** *písemná práce z MB101. Na řešení máte 40 minut. Na každý papír se prosím čitelně podepište a napište svou skupinu. Pracujte pozorně. Pokud něčemu v zadání nerozumíte, zeptejte se. Přeji Vám hodně štěstí!!!*

Příklad č. 1: Zjistěte pro které hodnoty parametrů a, b má soustava v $\mathbb{R}$

1. právě 1 řešení (nepočítejte ho),
2. více než jedno řešení (napište tvar těchto řešení),
3. žádné řešení.

$$\begin{aligned} ax + y + z &= b \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + bz &= a. \end{aligned}$$

Řešení. Nejprve sestavíme matici soustavy, kterou následně upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & b-a \\ 0 & 0 & b-1 & a-1 \end{array}\right)$$

Nyní již rozhodujeme o počtu řešení na základě toho, jak bude vypadat poslední řádek:

1. Právě jedno řešení dostaneme, když v posledním řádku bude před lomítkem nenulový prvek, tedy odtud dostáváme, že $b \neq 1$.
2. Nekonečně mnoho řešení bude soustava mít, když v posledním řádku budou samé nuly, tedy odtud dostáváme $b = 1$ a $a = 1$. Řešení pak má tvar $z = p$, $y = t$, $x = 1 - p - t$.
3. Soustava nebude mít žádné řešení, když na levé straně v posledním řádku budou nuly a na pravé straně nenulový prvek, tedy pak $b = 1$ a $a \neq 1$

Příklad č. 2: Z následujících vektorů libovolně vyberte podmnožinu s maximálním počtem lineárně nezávislých vektorů:

$$\begin{pmatrix}1\\4\\1\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\4\\1\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$

Řešení. Každý z vektorů má 4 souřadnice a proto bude maximální množina lineárně nezávislých vektorů, utvořená z těchto vektorů, obsahovat nanejvýš 4 vektory. Na základě definice lineární nezávislosti řešíme následující soustavu:

$$\begin{pmatrix}1&3&1&1&1\\4&4&2&2&3\\1&1&3&3&2\\4&3&4&2&1\end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix}1&3&1&1&1\\0&1&-1&-1&\frac{-1}{2}\\0&0&1&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Matici jsme upravili na schodovitý tvar a je vidět, že tyto vektory jsou lineárně závislé. Vybíráme z nich tedy ty vektory, které mají ve svém sloupci vedoucí prvek řádku matice. Tedy v našem případě 1.-4. vektor.

Příklad č. 3: Určete hodnost matice A a v případě, že existuje, nalezněte inverzní matici:

$$A = \begin{pmatrix}0&1&1\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve ověříme hodnost tak, že matici upravíme na schodovitý tvar a zjistíme počet lineárně nezávislých řádků:

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Odtud plyne, že hodnost matice je 3 a existuje tedy její inverzní matice. Tu vypočteme na základě úpravy následující blokové matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\-2&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-1\\0&1&0&2&-1&-2\\0&0&1&-1&1&2\end{array}\right)$$

Na pravé straně za lomítkem máme hledanou inverzní matici.

Příklad č. 4: Dvěma různými způsoby vypočtěte determinant matice B

$$B = \begin{pmatrix}3&-1&4\\1&-3&2\\4&8&2\end{pmatrix}$$

Řešení. Nejjednodušší je použít Sarrusovo pravidlo. Další možný způsob je pomocí EŘO nebo Laplaceova rozvoje. Výsledek je 8.