Skupina A

*3.**samostatná** písemná práce z MB101. Na řešení máte 40 minut. Na každý papír se prosím čitelně podepište a napište svou skupinu. Pracujte pozorně. Pokud něčemu v zadání nerozumíte, zeptejte se. Přeji Vám hodně štěstí!!!*

Příklad č. 1: Určete dimenzi a najděte nějakou bázi podprostoru

$$V = span\left\langle (1,2,1)^T, (2,0,1)^T, (1,0,0)^T, (2,2,3)^T, (2,1,1)^T, (1,3,0)^T \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Řešení. Bázi určíme tak, že vybereme lineárně nezávislé vektory z této množiny, tedy vektory naskládáme do matice a tu upravíme na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Odtud je vidět, že bázi můžeme vytvořit například z prvních tří vektorů. Dimenze udává počet vektorů v bázi, tedy $dim V = 3$.

Příklad č. 2: Určete bázi a dimenzi součtu a průniku podprostorů S a T.

$$S = span\left\langle (1,-1,0)^T, (1,2,0)^T \right\rangle$$

$$T = span\left\langle (2,1,1)^T, (0,2,3)^T \right\rangle$$

Řešení. Bázi množiny $S + T$ zjistíme tak, že vybereme lineárně nezávislé vektory z obou podprostorů, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $S + T = \left\langle (1,-1,0)^T, (1,2,0)^T, (2,1,1)^T \right\rangle$. Platí $dim S + T = 3$.

Víme, že platí: když $x \in S \cap T$, pak $x = a_1(1,-1,0)^T + a_2(1,2,0)^T$ a zároveň $x = b_1(2,1,1)^T + b_2(0,2,3)^T$. Odtud platí

$$a_1(1,-1,0)^T + a_2(1,2,0)^T - b_1(2,1,1)^T - b_2(0,2,3)^T = 0.$$

Řešíme tuto soustavu, můžeme vzužít již upravený schodovitý tvar předchozí matice. Odtud dostáváme, že $b_2 = -p$ a $b_1 = 3p$, kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr. Neznáme a_1 a a_2 již nemusíme počítat. Dosadíme do x a dostáváme

$$\begin{aligned} x &= b_1(2,1,1)^T + b_2(0,2,3)^T = 3p(2,1,1)^T - p(0,2,3)^T \\ &= p\left[(6,3,3)^T - (0,2,3)^T\right] = p[(6,1,0)^T] = span\left\langle (6,1,0)^T \right\rangle \end{aligned}$$

Platí $dim S \cap T = 1$

Příklad č. 3: Zjistěte, zda je zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární:

$$f\left((x,y,z)\right) = (2x - z, y + z).$$

Jestliže ano, pak určete $Kerf$ a Imf.

Řešení. Nejprve ověříme platnost linearity. Tedy

1.

$$\begin{aligned} f((x,y,z) + (k,l,m)) &= f((x+k, y+l, z+m)) = \\ (2x + 2k - z - m, y + l + z + m) &= (2x - z, y + z) + (2k - m, l + m) \\ = f((x,y,z)) + f((k,l,m)) & \end{aligned}$$

2.

$$af((x,y,z)) = a(2x - z, y + z) = (2ax - az, ay + az) = f((ax, ay, az))$$

Linearita je tedy splněna. Nyní najdeme jádro $Kerf$. Víme, že podle definice musí platit

$$(2x - z, y + z) = (0,0)$$

A odtut dostáváme $2x - z = 0$ a zároveň $y + z = 0$. Řešením této soustavy dostáváme $z = t$, $y = -t$ a $x = \frac{t}{2}$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. A tedy platí

$$Kerf = (\frac{t}{2}, -t, t)^T = t(\frac{1}{2}, -1, 1)^T = span\left\langle (\frac{1}{2}, -1, 1)^T \right\rangle$$

Obraz Imf nalezneme tak, že se podíváme, kam se zobrazují vektory báze $\mathbb{R}^3$. Tedy

$$\begin{aligned} f((1,0,0)) &= (2,0) \\ f((0,1,0)) &= (0,1) \\ f((0,0,1)) &= (-1,1) \end{aligned}$$

A odtud dostáváme

$$Imf = span\left\langle (2,0)^T, (0,1)^T, (-1,1)^T \right\rangle = \left\langle (2,0)^T, (0,1)^T \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

Příklad č. 4: Najděte matici přechodu od báze α k bázi β. Pomocí této matice určete souřadnice vektoru $(w)_\alpha = (1, 1, 1)$ v bázi β.

$$\alpha = [(3, 1, -5), (1, 1, -3), (-1, 0, 2)]$$

$$\beta = [(2, 1, 1), (2, -1, 1), (1, 2, 1)]$$

Řešení. Potřebujeme vyjádřit každý vektor z báze α jako lineární kombinaci vektorů z báze β. Označíme-li si vektory v bázi α jako u_1, u_2 a u_3 a vektory z báze β jako v_1, v_2 a v_3, pak budeme řešit následující soustavy

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3 \\ u_2 &= a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3 \\ u_3 &= a_3 v_1 + b_3 v_2 + c_3 v_3 \end{aligned}$$

Matice přechodu má pak tvar

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Dopočtením koeficientů dostáváme matici přechodu

$$(id)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{35}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{13}{2} \\ -\frac{19}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ -13 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

S jejím využitím pak spočteme $(w)_\beta$.

$$(w)_\beta = (id)_{\beta,\alpha}(w)_\alpha = \left(\frac{41}{2}, -\frac{23}{2}, -15\right)^T$$