Skupina B

*3.**samostatná** písemná práce z MB101. Na řešení máte 40 minut. Na každý papír se prosím čitelně podepište a napište svou skupinu. Pracujte pozorně. Pokud něčemu v zadání nerozumíte, zeptejte se. Přeji Vám hodně štěstí!!!*

Příklad č. 1: Určete dimenzi a najděte nějakou bázi podprostoru

$$V = span\left\langle (1,1,3)^T, (3,1,0)^T, (1,0,2)^T, (2,0,3)^T, (2,2,1)^T, (2,0,1)^T \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Řešení. Bázi určíme tak, že vybereme lineárně nezávislé vektory z této množiny, tedy vektory naskládáme do matice a tu upravíme na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Odtud je vidět, že bázi můžeme vytvořit například z prvních tří vektorů. Dimenze udává počet vektorů v bázi, tedy $dimV = 3$.

Příklad č. 2: Určete bázi a dimenzi součtu a průniku podprostorů S a T.

$$S = span\left\langle (0,4,1)^T, (1,2,0)^T \right\rangle$$

$$T = span\left\langle (1,1,1)^T, (0,-1,2)^T, (2,0,-1)^T \right\rangle$$

Řešení. Bázi množiny $S + T$ zjistíme tak, že vybereme lineárně nezávislé vektory z obou podprostorů, tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $S + T = \left\langle (0,4,1)^T, (1,2,0)^T, (1,1,1)^T \right\rangle$. Platí $dimS + T = 3$.

Víme, že platí: když $x \in S \cap T$, pak $x = a_1(0,4,1)^T + a_2(1,2,0)^T$ a zároveň $x = b_1(1,1,1)^T + b_2(0,-1,2)^T + b_3(2,0,-1)^T$. Odtud platí

$$a_1(0,4,1)^T + a_2(1,2,0)^T - b_1(1,1,1)^T - b_2(0,-1,2)^T - b_3(20-1)^T = 0.$$

Řešíme tuto soustavu, můžeme vzužít již upravený schodovitý tvar předchozí matice. Odtud dostáváme, že $b_3 = -p$, $b_2 = -t$ a $b_1 = \frac{9}{5}t$, kde $p, t \in \mathbb{R}$

jsou parametry. Neznáme a_1 a a_2 již nemusíme počítat. Dosadíme do x a dostáváme

$$
\begin{aligned}
x &= b_1(1,1,1)^T + b_2(0,-1,2)^T + b_3(2,0,-1)^T \\
&= \frac{9}{5}t(1,1,1)^T - t(0,-1,2)^T - p(2,0,-1)^T \\
&= t\left[\left(\frac{9}{5},\frac{9}{5},\frac{9}{5}\right)^T - (0,-1,2)^T\right] - p(2,0,-1)^T \\
&= span\left\langle (2,0,-1)^T, \left(\frac{9}{5},\frac{14}{5},\frac{-1}{5}\right)^T\right\rangle
\end{aligned}
$$

Platí $dim S \cap T = 2$

Příklad č. 3: Zjistěte, zda je zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární:

$$f((x,y,z)) = (z, 2x - y + 2z).$$

Jestliže ano, pak určete $Ker f$ a $Im f$.

Řešení. Nejprve ověříme platnost linearity. Tedy

1.

$$
\begin{aligned}
f((x,y,z)+(k,l,m)) &= f((x+k,y+l,z+m)) = \\
(z+m, 2x+2k-y-l+2z+2m) &= (z,2x-y+2z)+(m,2k-l+2m) \\
= f((x,y,z))+f((k,l,m))
\end{aligned}
$$

2.

$$af((x,y,z)) = a(z,2x-y+2z) = (2az, 2ax - ay + 2az) = f((ax,ay,az))$$

Linearita je tedy splněna. Nyní najdeme jádro $Ker f$. Víme, že podle definice musí platit

$$(z, 2x - y + 2z) = (0,0)$$

A odtut dostáváme $z = 0$ a zároveň $2x - y + 2z = 0$. Řešením této soustavy dostáváme $z = 0$, $y = 2t$ a $x = t$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. A tedy platí

$$Ker f = (t, 2t, 0)^T = t(1,2,0)^T = span\left\langle (1,2,0)^T\right\rangle$$

Obraz $Im f$ nalezneme tak, že se podíváme, kam se zobrazují vektory báze $\mathbb{R}^3$. Tedy

$$
\begin{aligned}
f((1,0,0)) &= (0,2) \\
f((0,1,0)) &= (0,-1) \\
f((0,0,1)) &= (1,2)
\end{aligned}
$$

A odtud dostáváme

$$Imf = span\left\langle (0,2)^T, (0,-1)^T, (1,2)^T \right\rangle = \left\langle (0,2)^T, (1,2)^T \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

Příklad č. 4: Najděte matici přechodu od báze α k bázi β. Pomocí této matice určete souřadnice vektoru $(w)_\alpha = (-5, 8, 2)$ v bázi β.

$$\alpha = [(2,1,1), (2,-1,1), (1,2,1)]$$

$$\beta = [(3,1,-5), (1,1,-3), (-1,0,2)]$$

Řešení. Potřebujeme vyjádřit každý vektor z báze α jako lineární kombinaci vektorů z báze β. Označíme-li si vektory v bázi α jako u_1, u_2 a u_3 a vektory z báze β jako v_1, v_2 a v_3, pak budeme řešit následující soustavy

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1v_1 + b_1v_2 + c_1v_3 \\ u_2 &= a_2v_1 + b_2v_2 + c_2v_3 \\ u_3 &= a_3v_1 + b_3v_2 + c_3v_3 \end{aligned}$$

Matice přechodu má pak tvar

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Dopočtením koeficientů dostáváme matici přechodu

$$(id)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

S jejím využitím pak spočteme $(w)_\beta$.

$$(w)_\beta = (id)_{\beta,\alpha}(w)_\alpha = (6, -15, -5)^T$$