Skupina C

*3.**samostatná** písemná práce z MB101. Na řešení máte 40 minut. Na každý papír se prosím čitelně podepište a napište svou skupinu. Pracujte pozorně. Pokud něčemu v zadání nerozumíte, zeptejte se. Přeji Vám hodně štěstí!!!*

Příklad č. 1: Určete dimenzi a najděte nějakou bázi podprostoru

$$V = span\left\langle (2,0,2)^T, (3,1,1)^T, (2,1,1)^T, (1,0,2)^T, (2,2,1)^T, (1,2,0)^T \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Řešení. Bázi určíme tak, že vybereme lineárně nezávislé vektory z této množiny, tedy vektory naskládáme do matice a tu upravíme na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Odtud je vidět, že bázi můžeme vytvořit například z prvních tří vektorů. Dimenze udává počet vektorů v bázi, tedy $dim V = 3$.

Příklad č. 2: Uvažujme vektorový prostor $Mat_{2\times 2}$ matic řádu 2 a v něm množinu W takových matic, které mají součet prvků na hlavní diagonále roven 0. Určete, jestli je W vektorový podprostor v prostoru $Mat_{2\times 2}$.

Řešení. V prostoru W leží matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Aby se skutecně jednalo o vektorový podprostor, musí být splněny 3 podmínky:

1. $W \neq \emptyset$, tato podmínka je splněna, neboť např. matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ leží ve W.

2. $\forall u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$, podmínka je splněna:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l \\ m & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+k & b+l \\ c+m & -a-k \end{pmatrix}$$

   Odtud je vidět, že součet také patří do W.

3. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in W \Rightarrow au \in W$

$$t\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & -ta \end{pmatrix}$$

   Také třetí podmínka je tedy splněna. Jedná se proto o vektorový podprostor.

Příklad č. 3: Zjistěte, zda je zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární:

$$f\left((x, y, z)\right) = (x - y - 2z, x - y).$$

Jestliže ano, pak určete $Kerf$ a Imf.

Řešení. Nejprve ověříme platnost linearity. Tedy

1.

$$\begin{aligned} f((x,y,z) + (k,l,m)) &= f((x+k, y+l, z+m)) = \\ (x+k-y-l-2z-2m, x+k-y-l) &= (x-y-2z, x-y) + (k-l-2m, k-l) \\ = f((x,y,z)) + f((k,l,m)) & \end{aligned}$$

2.

$$af((x,y,z)) = a(x-y-2z, x-y) = (ax-ay-2az, ax-ay) = f((ax, ay, az))$$

Linearita je tedy splněna. Nyní najdeme jádro $Kerf$. Víme, že podle definice musí platit

$$(x - y - 2z, x - y) = (0, 0)$$

A odtut dostáváme $x-y-2z = 0$ a zároveň $x-y = 0$. Řešením této soustavy dostáváme $z = 0$, $y = t$ a $x = t$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. A tedy platí

$$Kerf = (t, t, 0)^T = t(1, 1, 0)^T = span\left\langle (1, 1, 0)^T \right\rangle$$

Obraz Imf nalezneme tak, že se podíváme, kam se zobrazují vektory báze $\mathbb{R}^3$. Tedy

$$\begin{aligned} f((1,0,0)) &= (1,1) \\ f((0,1,0)) &= (-1,-1) \\ f((0,0,1)) &= (-2,0) \end{aligned}$$

A odtud dostáváme

$$Imf = span\left\langle (1,1)^T, (-1,-1)^T, (-2,0)^T \right\rangle = \left\langle (1,1)^T, (-2,0)^T \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

Příklad č. 4:

- Určete souřadnice $[u]_\alpha$ vektoru $u = 2x^2+x+5$ v bázi $\alpha = \{x^2+x, x^2+1, x+1\}$ prostoru $\mathbb{R}_2[x]$.
- Určete vektor v (pozor, jsme v prostoru polynomů), jsou-li jeho souřadnice v bázi $\alpha = \{x^2+x, x^2+1, x+1\}$ rovny $[v]_\alpha = (1, 0, -3)^T$.

Řešení.

1. K řešení můžeme použít matici přechodu od standardní báze k bázi alpha. Vektor u je nyní ve standardní bázi a my chceme jeho souředníce v bázi alpha. Nebo můžeme příklad vyřešit i bez matice přechodu a to tak, že budeme řešit soustavu rovnic:

$$2x^2 + x + 5 = a(x^2+x) + b(x^2+1) + c(x+1)$$

tedy

$$\begin{aligned} 2 &= a+b \\ 1 &= a+c \\ 5 &= b+c \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $a = -1$, $b = 3$ a $c = 2$. Platí tedy $(u)_\alpha = (-1, 3, 2)^T$.

2. Souřadnice nám udávají toto:

$$v = 1(x^2+x) + 0(x^2+1) - 3(x+1)$$

Odtud tedy

$$v = x^2 - 2x - 3.$$