Matematika II – 2. přednáška
Spojité funkce, limity

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

5. 10. 2011

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (*rovněž na* `http://www.math.muni.cz/~dosla/download/skript.pdf`).

Plán přednášky

1. Reálná čísla
2. Limita posloupnosti a funkce
3. Spojitost
4. Přírůstky do ZOO
5. Derivace

Reálná čísla

Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.

Reálná čísla

Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.
Připoměňme si nyní vlastnosti (axiomy) reálných čísel včetně souvislostí uspořádání a ostatních relací. Dělící čáry v tabulce naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní grupa vůči násobení, $\mathbb{R}$ je pole, množina $\mathbb{R}$ spolu s operacemi $+$, $\cdot$ a s relací uspořádání je tzv. **uspořádané těleso (pole)** a konečně poslednímu axiomu můžeme rozumět tak, že $\mathbb{R}$ je *dostatečně husté*, tj. nechybí nám tam body, jako např. druhá odmocnina ze dvou v číslech racionálních.

Reálná čísla

Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.
Připoměňme si nyní vlastnosti (axiomy) reálných čísel včetně souvislostí uspořádání a ostatních relací. Dělící čáry v tabulce naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní grupa vůči násobení, $\mathbb{R}$ je pole, množina $\mathbb{R}$ spolu s operacemi $+$, $\cdot$ a s relací uspořádání je tzv. **uspořádané těleso (pole)** a konečně poslednímu axiomu můžeme rozumět tak, že $\mathbb{R}$ je *dostatečně husté*, tj. nechybí nám tam body, jako např. druhá odmocnina ze dvou v číslech racionálních.
Zároveň si uvědomujme, které z axiomů platí pro $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{C}$.

(R1)	$(a+b)+c = a+(b+c)$, pro všechny $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$
(R2)	$a+b = b+a$, pro všechny $a,\ b \in \mathbb{R}$
(R3)	existuje $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $a+0 = a$
(R4)	pro všechny $a \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek $(-a) \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a+(-a) = 0$
(R5)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pro všechny $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$
(R6)	$a \cdot b = b \cdot a$ pro všechny $a,\ b \in \mathbb{R}$
(R7)	existuje $1 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $1 \cdot a = a$
(R8)	pro každý $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje inverzní prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a \cdot a^{-1} = 1$
(R9)	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, pro všechny $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$
(R10)	relace $\leq$ je úplné uspořádání, tj. reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná relace na $\mathbb{R}$
(R11)	pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí, že z $a \leq b$ vyplývá $a+c \leq b+c$
(R12)	pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, platí také $a \cdot b > 0$
(R13)	každá neprázdná ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}$ má supremum.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.
Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

$$\textit{horní závorou} \text{ množiny } A, \text{ pokud } \forall x \in A: \ x \leq b,$$

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje *dolní závora* množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.
Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

$$\textit{horní závorou množiny } A\text{, pokud } \forall\, x \in A: \ \ x \leq b,$$

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje *dolní závora* množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.
Řekneme, že množina A je *shora ohraničená* (shora omezená), pokud má A alespoň jednu horní závoru. Podobně se definuje *zdola ohraničená* (zdola omezená) množina A. Množina A je *ohraničená* (omezená), pokud je A současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.
Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

$$\textit{horní závorou} \text{ množiny } A, \text{ pokud } \forall\, x \in A: \ x \leq b,$$

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje *dolní závora* množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.
Řekneme, že množina A je *shora ohraničená* (shora omezená), pokud má A alespoň jednu horní závoru. Podobně se definuje *zdola ohraničená* (zdola omezená) množina A. Množina A je *ohraničená* (omezená), pokud je A současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.
Nejmenší horní závora množiny A se nazývá *supremum* množiny A.

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je *supremum* množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A: \;\; x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.

Obdobně se definuje *infimum* množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme $a = \inf A$.

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je *supremum* množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A: \;\; x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.
Obdobně se definuje *infimum* množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme $a = \inf A$.

Příklad

Je-li A libovolný z intervalů $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$ nebo $(0,1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{a} \quad \inf A = 0.$$

Má-li množina A největší (resp. nejmenší) prvek b, potom je $b = \sup A$ (resp. $b = \inf A$).

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je *supremum* množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A: \;\; x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.
Obdobně se definuje *infimum* množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme $a = \inf A$.

Příklad

Je-li A libovolný z intervalů $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$ nebo $(0,1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{a} \quad \inf A = 0.$$

Má-li množina A největší (resp. nejmenší) prvek b, potom je $b = \sup A$ (resp. $b = \inf A$). Zatímco největší či nejmenší prvek nemusí v A existovat, i když je množina A ohraničená, supremum a infimum existují (v ohraničeném případě) vždy (jak je vidět z výše uvedeného axiomu R13).

Plán přednášky

1. Reálná čísla
2. Limita posloupnosti a funkce
3. Spojitost
4. Přírůstky do ZOO
5. Derivace

Limita

V tomto odstavci se budeme podrobně zabývat situací, kdy se nějaké hodnoty funkce (nebo posloupnosti) „blíží“ k nějakému číslu či k $\pm\infty$. To pak přirozeně vede k zavedení pojmu „limita“.

Limita

V tomto odstavci se budeme podrobně zabývat situací, kdy se nějaké hodnoty funkce (nebo posloupnosti) „blíží“ k nějakému číslu či k $\pm\infty$. To pak přirozeně vede k zavedení pojmu „limita“.

Příklad

K přiblížení pojmu „limita“ může dobře posloužit již známý pojem infima či suprema. Zřejmě je $0 = \inf(0,1), \quad 1 = \sup(0,1)$, a přitom ani jedno z čísel 0, 1 v množině $(0,1)$ neleží. Uvažujme posloupnost bodů

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \in (0,1)$$

pro zvyšující se n. Potom vidíme, že se hodnoty této posloupnosti „nekonečně blíží“ k hodnotě infima (k nule), ale nikdy této hodnoty nedosáhnou. Podobně toto platí pro posloupnost $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \in (0,1)$ a hodnotu suprema 1.

Limita funkce

Podobně jako v případě reálných posloupností (tj. vlastně funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) je asi intuitivně zřejmé, co je míněno „limitou funkce v bodě x_0 “.

Limita funkce

Podobně jako v případě reálných posloupností (tj. vlastně funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) je asi intuitivně zřejmé, co je míněno „limitou funkce v bodě x_0 “.

Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0, pokud se funkční hodnoty $f(x)$ *libovolně blíží* k číslu L, když je x *dostatečně blízko* k x_0.

Příklad

Uvádíme různé „druhy“ limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme
$\lim_{x\to 3}(3x+1) = 10, \qquad \lim_{x\to\infty}(3x+1) = \infty.$

Limita funkce

Podobně jako v případě reálných posloupností (tj. vlastně funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) je asi intuitivně zřejmé, co je míněno „limitou funkce v bodě x_0 “.

Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0, pokud se funkční hodnoty $f(x)$ *libovolně blíží* k číslu L, když je x *dostatečně blízko* k x_0.

Příklad

Uvádíme různé „druhy“ limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme
$\lim_{x\to 3}(3x+1) = 10, \qquad \lim_{x\to\infty}(3x+1) = \infty.$

(b) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ máme (viz obr.)
$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$

Limita funkce

Podobně jako v případě reálných posloupností (tj. vlastně funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) je asi intuitivně zřejmé, co je míněno „limitou funkce v bodě x_0 “.

Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0, pokud se funkční hodnoty $f(x)$ *libovolně blíží* k číslu L, když je x *dostatečně blízko* k x_0.

Příklad

Uvádíme různé „druhy“ limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme
$\lim_{x\to 3}(3x+1) = 10, \qquad \lim_{x\to\infty}(3x+1) = \infty.$

(b) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ máme (viz obr.)
$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$

(c) Co je $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$?

Okolí bodu

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval $\mathcal{O}$, který a obsahuje. Je-li okolí definované jako interval $\mathcal{O}_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ pro kladné číslo δ, hovoříme o δ-**okolí** bodu a (a v případě množiny $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ o ryzím (též prstencovém) okolí bodu a).

Okolí bodu

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval $\mathcal{O}$, který a obsahuje. Je-li okolí definované jako interval $\mathcal{O}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ pro kladné číslo δ, hovoříme o δ-**okolí** bodu a (a v případě množiny $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ o ryzím (též prstencovém) okolí bodu a).
Pro diskusi limit je vhodné rozšířit množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ (*vlastních bodů*) o dvě nekonečné hodnoty $\pm\infty$ (*nevlastní body*), $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Proto zavádíme i pravidla pro počítání s těmito formálními hodnotami pro libovolná *konečná* čísla $a \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
a + \infty &= \infty \\
a - \infty &= -\infty \\
a \cdot \infty &= \infty, \text{ je-li } a > 0 \\
a \cdot \infty &= -\infty, \text{ je-li } a < 0
\end{aligned}
$$

Okolí bodu

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval $\mathcal{O}$, který a obsahuje. Je-li okolí definované jako interval $\mathcal{O}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ pro kladné číslo δ, hovoříme o δ-**okolí** bodu a (a v případě množiny $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ o ryzím (též prstencovém) okolí bodu a).
Pro diskusi limit je vhodné rozšířit množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ (*vlastních bodů*) o dvě nekonečné hodnoty $\pm\infty$ (*nevlastní body*), $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Proto zavádíme i pravidla pro počítání s těmito formálními hodnotami pro libovolná *konečná* čísla $a \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
a + \infty &= \infty \\
a - \infty &= -\infty \\
a \cdot \infty &= \infty, \ \text{je-li } a > 0 \\
a \cdot \infty &= -\infty, \ \text{je-li } a < 0
\end{aligned}
$$

Okolím ∞ , resp. $-\infty$, rozumíme interval (a, ∞), resp. $(-\infty, a)$.

Limita

Definice

Buď $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu* L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Limita

Definice

Buď $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu* L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Poznámka

To, že požadujeme, aby $x \neq x_0$, znamená, že **limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě** x_0**!**, tj. zajímají nás pouze hodnoty v **ryzím** okolí bodu x_0.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to 3}(3x+1)=10$.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to 3}(3x+1) = 10$.

Řešení

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $\delta > 0$ takové, aby $|y-10| < \varepsilon$, kdykoliv bude $0 < |x-3| < \delta$. Tedy

$$\big|(3x+1)-10\big| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |3x-9| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |x-3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stačí tedy vzít $\boxed{\delta := \frac{\varepsilon}{3}}$, případně libovolné jiné δ splňující $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{3}$.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Řešení

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $a > 0$ takové, aby $|y - 0| < \varepsilon$, kdykoliv bude $x > a$. Tedy
$|\frac{1}{x}| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{x} < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad x > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy vzít $a := \frac{1}{\varepsilon}$, případně libovolné jiné a splňující $a \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Řešení

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $a > 0$ takové, aby $|y - 0| < \varepsilon$, kdykoliv bude $x > a$. Tedy $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$, tj. $\frac{1}{x} < \varepsilon$, tj. $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy vzít $a := \frac{1}{\varepsilon}$, případně libovolné jiné a splňující $a \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Ve vlastních bodech x_0 se můžeme blížit k bodu x_0 také jen zprava nebo jen zleva, tj. v definici limity použijeme pouze pravé ryzí okolí bodu x_0 nebo pouze levé ryzí okolí bodu x_0. Dostáváme pak pojmy *limity zprava a limity zleva*.

Příklad

Pro funkci $\operatorname{sgn} x$ („signum“ = znaménko) definovanou jako

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0, \\ -1, & \text{pro } x < 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Příklad

Pro funkci $\operatorname{sgn} x$ („signum“ = znaménko) definovanou jako

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0, \\ -1, & \text{pro } x < 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Příklad

Pro funkci $\frac{1}{x}$ platí

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Limita posloupnosti

Jestliže je funkce f je definována pouze pro přirozená čísla, hovoříme o **limitách posloupností reálných nebo komplexních čísel**. Zřejmě má smysl prát se pouze po limitách v ∞ (tj. jediným hromadným bodem $\mathbb{N}$ je ∞) a píšeme pro $f(n) = a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Podle definice to pak znamená, že pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ limitní hodnoty a existuje index $N \in \mathbb{N}$ takový, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$ pro všechny $n \geq N$. Ve skutečnosti jsme tedy v tomto speciálním případě přeformulovali definici konvergence posloupnosti. Říkáme také, že *posloupnost a_n konverguje k a*.

Kdy limita neexistuje?

- *skok* – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),

Kdy limita neexistuje?

- *skok* – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),
- *„nekonečný" skok* – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz funkce $1/x$),

Kdy limita neexistuje?

- *skok* – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),
- *„nekonečný" skok* – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz funkce $1/x$),
- *oscilace* – např. funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Kdy limita neexistuje?

- *skok* – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),
- „*nekonečný*“ *skok* – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz funkce $1/x$),
- *oscilace* – např. funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Kdy limita neexistuje?

- *skok* – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),
- *„nekonečný" skok* – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz funkce $1/x$),
- *oscilace* – např. funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad (Dirichletova funkce)

$$q(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \quad (\text{tj. pro } x \text{ racionální}), \\ 0, & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \quad (\text{tj. pro } x \text{ iracionální}), \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, protože v libovolném okolí zvoleného bodu x_0 se nacházejí jak racionální, tak iracionální čísla, a tedy tato funkce zde nabývá hodnot 1 i 0 (a tedy zde nemůže mít limitu).

Vlastnosti limit

Věta

1. *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*

Vlastnosti limit

Věta

1. *Funkce* $f(x)$ *má v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *nejvýše jednu limitu.*
2. *Má-li* $f(x)$ *vlastní limitu* $L \in \mathbb{R}$ *v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}^*$*, potom je* $f(x)$ *na nějakém ryzím okolí bodu* x_0 *ohraničená.*

Vlastnosti limit

Věta

1. *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*
2. *Má-li $f(x)$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, potom je $f(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 ohraničená.*
3. *Limita existuje, právě když existují obě jednostranné limity a jsou si rovny, tj.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Vlastnosti limit

Věta

Jsou-li

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = M,$$

kde $L, M \in \mathbb{R}$ *(pouze vlastní limity!) a* $x_0 \in \mathbb{R}^*$*, potom*

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = L \pm M,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \qquad \textit{pokud } M \neq 0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \left| f(x) \right| = \left| \lim_{x \to x_0} f(x) \right| = |L|.$$

Vlastnosti limit

Věta (O třech limitách)

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Je-li $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 a je-li

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L = \lim_{x \to x_0} h(x),$$

potom také existuje limita funkce $f(x)$ a je rovna číslu L, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Příklad

Rozhodněte, jestli má funkce $x \sin \frac{1}{x}$ limitu v bodě $x_0 = 0$.

Příklad

Rozhodněte, jestli má funkce $x \sin \frac{1}{x}$ limitu v bodě $x_0 = 0$.

Řešení

Protože je funkce $\sin x$ ohraničená (jedničkou shora a mínus jedničkou zdola), pro $x \neq 0$ platí nerovnosti $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$. A protože $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, existuje podle Věty také limita funkce $x \sin \frac{1}{x}$ a platí $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Plán přednášky

Spojitost

Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny „důležité“ vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Obdobně spojitost zprava a zleva.

Spojitost

Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny „důležité“ vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Obdobně spojitost zprava a zleva. Funkce f je *spojitá na množině* A, jestliže je spojitá ve ve všech bodech $x_0 \in A$ (příp. jednostranně).

Spojitost

Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny „důležité“ vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Obdobně spojitost zprava a zleva. Funkce f je *spojitá na množině* A, jestliže je spojitá ve ve všech bodech $x_0 \in A$ (příp. jednostranně).

Příklad

Z vlastností limity snadno plyne, že každý polynom (a tedy i každý splajn) je spojitou funkcí na celém $\mathbb{R}$. Každá racionální lomená funkce je pak spojitá ve všech bodech, kde je nenulový jmenovatel.

Příklad

1. Funkce $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ je spojitá na intervalu $[-2, 2]$, tj. $f \in C[-2, 2]$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ je spojitá na intervalu $[-2, 2]$, tj. $f \in C[-2, 2]$.
2. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$, na intervalu $(0, \infty)$, ale není spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ (tedy na $\mathbb{R}$).

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

1. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \,.\, g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } g(x_0) \neq 0.$$

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

1. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \,.\, g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \ \text{pro } g(x_0) \neq 0.$$

2. (Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom

$$\lim_{x \to x_0} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(M).$$

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

1. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \,.\, g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } g(x_0) \neq 0.$$

2. (Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom

$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to x_0} g(x)\Big) = f(M).$$

3. (Spojitost složené funkce.) Je-li funkce $g(x)$ spojitá v bodě x_0 a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom je složená funkce $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ spojitá v bodě x_0.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.

Věta (Bolzanova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom $f(x)$ nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou.

Důsledek

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, pak existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že platí $f(c) = 0$, tj. rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu (a, b) alespoň jedno řešení.

Spojitost inverzní funkce

Věta

Je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní (tj. stále „roste“ nebo stále „klesá“) na intervalu I, potom je také inverzní funkce $f^{-1}(x)$ spojitá a ryze monotónní na intervalu $J := f(I)$.

Spojitost inverzní funkce

Věta

Je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní (tj. stále „roste“ nebo stále „klesá“) na intervalu I, potom je také inverzní funkce $f^{-1}(x)$ spojitá a ryze monotónní na intervalu $J := f(I)$.

Poznámka

Z této věty snadno vyplyne spojitost cyklometrických funkcí $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ (na příslušných intervalech) a dále spojitost logaritmických funkcí (jakmile je později definujeme).

Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech $x_0 \in \mathbb{R}$):

Odstranitelná nespojitost

Existuje vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ale tato limita je různá od $f(x_0)$ (případně $f(x_0)$ není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze „odstranit“ předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty $f(x_0)$.

Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech $x_0 \in \mathbb{R}$):

Odstranitelná nespojitost

Existuje vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ale tato limita je různá od $f(x_0)$ (případně $f(x_0)$ není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze „odstranit" předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty $f(x_0)$.

Příklad

- Funkce $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ má v bodě $x_0 = 2$ odstranitelnou nespojitost (v podstatě je $f(x) = x + 2$ pro $x \neq 2$).

Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech $x_0 \in \mathbb{R}$):

Odstranitelná nespojitost

Existuje vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ale tato limita je různá od $f(x_0)$ (případně $f(x_0)$ není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze „odstranit“ předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty $f(x_0)$.

Příklad

- Funkce $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ má v bodě $x_0 = 2$ odstranitelnou nespojitost (v podstatě je $f(x) = x + 2$ pro $x \neq 2$).
- Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má v bodě $x_0 = 0$ odstranitelnou nespojitost.

Body nespojitosti – pokr.

skok (nespojitost prvního druhu)

Existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

Body nespojitosti – pokr.

skok (nespojitost prvního druhu)

Existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

Příklad

Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě $x_0 = 0$ nespojitost typu skok.

Body nespojitosti – pokr.

skok (nespojitost prvního druhu)

Existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

Příklad

Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě $x_0 = 0$ nespojitost typu skok.

Nespojitost druhého druhu

Alespoň jedna jednostranná limita je buď nevlastní nebo neexistuje.

Body nespojitosti – pokr.

skok (nespojitost prvního druhu)

Existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

Příklad

Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě $x_0 = 0$ nespojitost typu skok.

Nespojitost druhého druhu

Alespoň jedna jednostranná limita je buď nevlastní nebo neexistuje.

Příklad

Funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

mají v bodě $x_0 = 2$ nespojitost druhého druhu.

Plán přednášky

Racionální (lomená) funkce

Nechť f a g jsou dva polynomy, které mohou mít i komplexní hodnoty (tj. připouštíme výrazy $a_n x^n + \cdots + a_0$ s komplexními $a_i \in \mathbb{C}$, ale dosazujeme jen reálné hodnoty za x). Pak funkce $h : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \to \mathbb{C}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ je dobře definována ve všech reálných bodech kromě kořenů polynomu g. Takové funkce nazýváme **racionální (lomené) funkce**.

Racionální (lomená) funkce

Nechť f a g jsou dva polynomy, které mohou mít i komplexní hodnoty (tj. připouštíme výrazy $a_n x^n + \cdots + a_0$ s komplexními $a_i \in \mathbb{C}$, ale dosazujeme jen reálné hodnoty za x). Pak funkce $h : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \to \mathbb{C}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ je dobře definována ve všech reálných bodech kromě kořenů polynomu g. Takové funkce nazýváme **racionální (lomené) funkce**.

Racionální funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru. V bodech, kde definovány nejsou, mohou mít

- konečnou limitu, když jde o společný kořen polynomů f i g (a v tomto případě rozšířením jejich definice o limitní hodnotu v tomto bodě dostaneme funkci i v tomto bodě spojitou)
- nekonečnou limitu, když limity zprava a zleva v tomto bodě jsou stejné
- různé nekonečné limity zprava a zleva.

Mocninné funkce

Polynomy jsou seskládány z jednoduchých mocninných funkcí $x \mapsto x^n$ s přirozeným číslem $n = 0, 1, 2, \ldots$. Samozřejmý smysl má také funkce $x \mapsto x^{-1}$ pro všechny $x \neq 0$. Tuto definici rozšíříme na obecnou **mocninnou funkci** s $n \in \mathbb{R}$.

Mocninné funkce

Polynomy jsou seskládány z jednoduchých mocninných funkcí $x \mapsto x^n$ s přirozeným číslem $n = 0, 1, 2, \ldots$. Samozřejmý smysl má také funkce $x \mapsto x^{-1}$ pro všechny $x \neq 0$. Tuto definici rozšíříme na obecnou **mocninnou funkci** s $n \in \mathbb{R}$.
Pro $n = -a$ s $a \in \mathbb{N}$ definujeme

$$x^{-a} = (x^a)^{-1} = (x^{-1})^a.$$

Dále jistě chceme, aby ze vztahu $b^n = x$ pro $n \in \mathbb{N}$ vyplývalo $b = x^{\frac{1}{n}}$. Je třeba ale ověřit, že taková b skutečně existují pro dané x. Předpokládejme $x > 0$ a označme B množinu $B = \{y \in \mathbb{R}, y > 0,\ y^n \leq x\}$. To je zřejmě shora ohraničená množina a lze ověřit, že pro $b = \sup B$ skutečně platí požadovaná rovnost.

Mocninné funkce

Polynomy jsou seskládány z jednoduchých mocninných funkcí $x \mapsto x^n$ s přirozeným číslem $n = 0, 1, 2, \dots$. Samozřejmý smysl má také funkce $x \mapsto x^{-1}$ pro všechny $x \neq 0$. Tuto definici rozšíříme na obecnou **mocninnou funkci** s $n \in \mathbb{R}$.
Pro $n = -a$ s $a \in \mathbb{N}$ definujeme

$$x^{-a} = (x^a)^{-1} = (x^{-1})^a.$$

Dále jistě chceme, aby ze vztahu $b^n = x$ pro $n \in \mathbb{N}$ vyplývalo $b = x^{\frac{1}{n}}$. Je třeba ale ověřit, že taková b skutečně existují pro dané x. Předpokládejme $x > 0$ a označme B množinu $B = \{y \in \mathbb{R}, y > 0,\ y^n \leq x\}$. To je zřejmě shora ohraničená množina a lze ověřit, že pro $b = \sup B$ skutečně platí požadovaná rovnost.
Zdůvodnili jsme tedy existenci x^a pro všechny $x > 0$ a $a \in \mathbb{Q}$.

Mocninná funkce – pokračování

Konečně, pro $a \in \mathbb{R}$, $x > 1$ klademe

$$x^a = \sup\{x^y, y \in \mathbb{Q},\ y \leq a\}.$$

Pro $0 < x < 1$ buď definujeme analogicky (je třeba si jen pohrát s nerovnítky) nebo klademe přímo $x^a = (\frac{1}{x})^{-a}$.
Pro $x = 1$ je pak $1^a = 1$ pro libovolné a.
Obecnou mocninnou funkci $x \mapsto x^a$ máme tedy dobře definovanou pro všechny $x \in [0, \infty)$ a $a \in \mathbb{R}$.

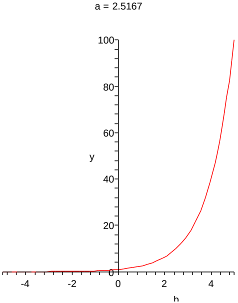
Exponenciální funkce

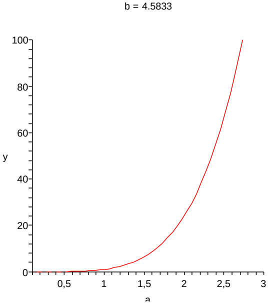
Naši konstrukci funkce x^a ale můžeme také číst následujícím způsobem: Pro každé pevné reálné $c > 0$ existuje dobře definovaná funkce na celém $\mathbb{R}$, $y \mapsto c^y$. Této funkci říkáme **exponenciální funkce o základu** c.

Exponenciální funkce

Naši konstrukci funkce x^a ale můžeme také číst následujícím způsobem: Pro každé pevné reálné $c > 0$ existuje dobře definovaná funkce na celém $\mathbb{R}$, $y \mapsto c^y$. Této funkci říkáme **exponenciální funkce o základu** c.

Na obrázcích vidíme funkce $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$ pro jednu konkrétní hodnotu $a = 2.5167$ a $b = 4.5833$.





Z našich definic je vcelku zřejmé, že mocninné i exponenciální funkce jsou spojité na celých svých definičních oborech. Zároveň se ze spojitosti definice pomocí suprem množin hodnot zjevně přenáší základní vlastnosti platné pro racionální čísla, a, x, y:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

Eulerovo číslo

Příklad

Určete limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$.

Eulerovo číslo

Příklad

Určete limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$.

Řešení

Z binomického rozvoje je zřejmé, že pro každé kladné číslo b a přirozené n platí $(1 + b)^n > 1 + nb$, dostáváme proto pro dva po sobě jdoucí členy naší posloupnosti podíl

$$\frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n^2 - 1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} > (1 - \frac{1}{n})\frac{n}{n-1} = 1.$$

Je tedy naše posloupnost rostoucí. Zároveň stejným výpočtem ověříme, že posloupnost čísel $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n})^n$ je klesající a jistě je $b_n > a_n$.

Eulerovo číslo

Příklad

Určete limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$.

Řešení

Z binomického rozvoje je zřejmé, že pro každé kladné číslo b a přirozené n platí $(1+b)^n > 1 + nb$, dostáváme proto pro dva po sobě jdoucí členy naší posloupnosti podíl

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n^2-1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} > (1 - \frac{1}{n})\frac{n}{n-1} = 1.$$

Je tedy naše posloupnost rostoucí. Zároveň stejným výpočtem ověříme, že posloupnost čísel $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n$ je klesající a jistě je $b_n > a_n$.
Ověřili jsme tedy existenci limity posloupnosti a_n (a zároveň vidíme, že je rovna limitě klesající posloupnosti b_n).

Definice

Limita

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je jedním z nejdůležitějších čísel v matematice (vedle nuly, jedničky a Ludolfova čísla π). Nazýváme jej **Eulerovým číslem** e.

Definice

Limita

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

je jedním z nejdůležitějších čísel v matematice (vedle nuly, jedničky a Ludolfova čísla π). Nazýváme jej **Eulerovým číslem** e.

Poznámka

O čísle e lze dokázat, že je iracionální a transcendentní (tj. není kořenem nenulového polynomu s celočíselnými koeficienty) – podobně jako Ludolfovo číslo π.

Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce e^x je všude dobře definována a prostá, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem e.

Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce e^x je všude dobře definována a prostá, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem e.

Je definována vztahem

$$e^{\ln x} = x.$$

Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce e^x je všude dobře definována a prostá, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem e.
Je definována vztahem

$$e^{\ln x} = x.$$

Z vlastností mocninných funkcí:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln x^y = y \cdot \ln x.$$

Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce e^x je všude dobře definována a prostá, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem e.
Je definována vztahem

$$e^{\ln x} = x.$$

Z vlastností mocninných funkcí:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln x^y = y \cdot \ln x.$$

Pro obecnou exponenciální funkci a^x se základem $a \neq 1$, $a > 0$ také existuje všude inverzní funkce. Říkáme jí **logaritmus při základu** a, píšeme $\log_a x$.

Limity příslušníků ZOO

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Limity příslušníků ZOO

Příklad

Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení

Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad$ (viz obr.).
A protože je pro tato x hodnota $\sin x > 0$, je

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{tj.} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jelikož je funkce $\cos x$ *spojitá* (v nule), obě strany nerovnosti se pro $x \to 0^+$ blíží k 1, a tedy podle věty o třech limitách je

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}.$$

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

Řešení

Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin x}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}}\right) = 1\,.\,0\,.\,\frac{1}{2} = 0.$$

Příklad

Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Příklad

Určete

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Řešení

Dosazením za $x=0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.
Pomocí nerovnosti $1+\frac{x}{x+1}<e^x<1+\frac{x}{1-2x}$, pro $x\in(0,\frac{1}{2})$, neboli $\frac{1}{x+1}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{1}{1-2x}$, pro $x\in(0,\frac{1}{2})$, dostaneme z věty o třech limitách, že $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Řešení

Dosazením za $x=0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.
Pomocí nerovnosti $1+\frac{x}{x+1}<e^x<1+\frac{x}{1-2x}$, pro $x\in(0,\frac{1}{2})$, neboli $\frac{1}{x+1}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{1}{1-2x}$, pro $x\in(0,\frac{1}{2})$, dostaneme z věty o třech limitách, že $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$. Podobně, platí $\frac{1}{1-2x}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{1}{x+1}$, pro $x\in(-\frac{1}{2},0)$, a tedy podle věty o třech limitách platí $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1$. Celkově tedy dostaneme
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Příklad

Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Řešení

Z předchozího příkladu víme, že pro malé x je $e^x - 1 \approx x$, tedy je $e^x \approx 1 + x$. Logaritmováním obou stran dostaneme, že $x \approx \ln(1+x)$. Tedy platí, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}.$$

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Řešení

Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.
Pomocí rovnosti $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}}_{\to 1} \cdot \ln a = \ln a,$$

a tedy je
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Plán přednášky

Derivace

Definice

Nechť f je reálná nebo komplexní funkce s definičním oborem $A \subset \mathbb{R}$ a $x_0 \in A$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

pak říkáme, že f má v bodě x_0 **derivaci** a. Píšeme často $a = f'(x_0)$ nebo $a = \frac{df}{dx}(x_0)$ případně $a = \frac{d}{dx} f(x_0)$.

Derivace funkce je **vlastní**, resp. **nevlastní**, když je takovou příslušná limita.

Jednostranné derivace (tj. derivaci zprava a zleva) definujeme zcela stejně pomocí limity zprava a zleva.

Analyzujme difereční podíl (viz obr.)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \varphi,$$

což je směrnice sečny procházející body $M = [x_0, f(x_0)]$ a $N = [x, f(x)]$

Analyzujme difereční podíl (viz obr.)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \varphi,$$

což je směrnice sečny procházející body $M = [x_0, f(x_0)]$ a $N = [x, f(x)]$

Pokud se x blíží k x_0 (tj. bod N se blíží k bodu M), sečna MN se stává *tečnou v bodě M*, a tedy je

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

směrnicí tečny v bodě $M = [x_0, f(x_0)]$.

Příklad

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = 1/x$ v bodě $x_0 = 1$.

Příklad

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = 1/x$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení

Směrnici tečny získáme vypočtením příslušné limity

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{x\,(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x} = -1.$$

Příklad

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = 1/x$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení

Směrnici tečny získáme vypočtením příslušné limity

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x\,(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x} = -1.$$

Rovnici tečny pak dostaneme ze vztahu

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

tj.

$$y = -x + 2.$$

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- Položíme-li $h := x - x_0$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- Položíme-li $h := x - x_0$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Tečna $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dobře aproximuje funkci f v dostatečně malém okolí bodu x_0.

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- Položíme-li $h := x - x_0$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Tečna $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dobře aproximuje funkci f v dostatečně malém okolí bodu x_0.
- Aby mohla mít funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0, musí být definována na nějakém okolí bodu x_0 (včetně bodu x_0)!

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- Položíme-li $h := x - x_0$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Tečna $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dobře aproximuje funkci f v dostatečně malém okolí bodu x_0.
- Aby mohla mít funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0, musí být definována na nějakém okolí bodu x_0 (včetně bodu x_0)!
- $f'(x_0)$ někdy píšeme jako $\frac{df}{dx}(x_0)$, nebo jako $f'(x)\big|_{x=x_0}$.

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodech $x_0 \in \mathcal{D}(f)$.

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodech $x_0 \in \mathcal{D}(f)$.

Řešení

Zřejmě je $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$. Pro $x_0 > 0$ je

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Pro $x_0 = 0$ derivace neexistuje (je to krajní bod definičního oboru, a tudíž v něm neexistuje limita – existuje zde pouze limita zprava). Vypočtěme tedy derivaci zprava:
$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.
Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ tedy má v počátku nevlastní pravostrannou derivaci $f'_+(0) = \infty$, neboli tečna v bodě $x_0 = 0$ je svislá přímka.

Již na první přednášce jsme pomocí binomické věty odvodili vztah pro derivaci monomů

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

podobně můžeme odvodit vztahy pro derivaci dalších elementárních funkcí.

Již na první přednášce jsme pomocí binomické věty odvodili vztah pro derivaci monomů

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

podobně můžeme odvodit vztahy pro derivaci dalších elementárních funkcí.

Pokud se na bod x_0 budeme dívat jako na „proměnnou“, potom můžeme derivaci chápat jako *zobrazení*, které každému bodu x přiřadí hodnotu $f'(x)$ (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy $f'(x)$ je opět funkce proměnné x, přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

Již na první přednášce jsme pomocí binomické věty odvodili vztah pro derivaci monomů

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

podobně můžeme odvodit vztahy pro derivaci dalších elementárních funkcí.

Pokud se na bod x_0 budeme dívat jako na „proměnnou“, potom můžeme derivaci chápat jako *zobrazení*, které každému bodu x přiřadí hodnotu $f'(x)$ (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy $f'(x)$ je opět funkce proměnné x, přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

Tedy prozatím odvozené vztahy pro derivace můžeme shrnout jako

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Již na první přednášce jsme pomocí binomické věty odvodili vztah pro derivaci monomů

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

podobně můžeme odvodit vztahy pro derivaci dalších elementárních funkcí.

Pokud se na bod x_0 budeme dívat jako na „proměnnou“, potom můžeme derivaci chápat jako *zobrazení*, které každému bodu x přiřadí hodnotu $f'(x)$ (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy $f'(x)$ je opět funkce proměnné x, přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

Tedy prozatím odvozené vztahy pro derivace můžeme shrnout jako

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Má-li funkce $f(x)$ derivaci v každém bodě množiny (např. intervalu) I, pak říkáme, že $f(x)$ je *diferencovatelná na I*. Např. x^n je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, nebo $\frac{1}{x}$ je diferencovatelná na $(0, \infty)$ a na $(-\infty, 0)$.

Derivace v praxi

rychlost

Je-li $s(t)$ poloha hmotného bodu na přímce v čase t, potom je výraz

$$\frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

roven průměrné rychlosti za časový úsek $[t_0, t]$. Zřejmě je pak

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

rychlost v okamžiku t_0, a tedy je

$$v(t) = s'(t), \qquad \text{rychlost je derivace dráhy.}$$

Zde je nutné vzít v úvahu, že rychlost $v(t)$ má znaménko, tj. $v(t) > 0$ ve směru pohybu, kdy se $s(t)$ zvětšuje a $v(t) < 0$, když se $s(t)$ zmenšuje.

zrychlení

Protože je zrychlení $a(t)$ změna rychlosti, podobně platí, že

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

je zrychlení v okamžiku t_0, a tedy je

$$a(t) = v'(t), \qquad \text{zrychlení je derivace rychlosti.}$$

výkon

Protože platí, že

$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$

je

$$P(t) = W'(t), \qquad \text{výkon je derivace práce.}$$

výkon

Protože platí, že

$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$

je

$$P(t) = W'(t), \qquad \text{výkon je derivace práce.}$$

proud

Protože platí, že

$$\text{elektrický proud} = \frac{\text{změna napětí}}{\text{změna času}},$$

je

$$I(t) = U'(t), \qquad \text{proud je derivace napětí.}$$