Matematika II – 4. přednáška
Derivace – základní věty, průběh funkce

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19. 10. 2011

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (*rovněž na* `http://www.math.muni.cz/~dosla/download/skript.pdf`).

Plán přednášky

Věty o střední hodnotě

Odvodíme několik výsledků, které nám umožní snáze pracovat s funkcemi při modelování reálných problémů.

Věta (Rolleova)

Nechť funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *je spojitá na intervalu* $[a,b]$ *a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Jestliže platí* $f(a)=f(b)$*, pak existuje* $c\in(a,b)$ *takové, že* $f'(c)=0$*.*

Důkaz.

Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu (tj. kompaktní množině) má na něm maximum a minimum. Pokud by maximum i minimum mělo stejnou hodnotu $f(a) = f(b)$, pak by funkce f byla konstantní a tedy i její derivace by byla nulová ve všech bodech intervalu (a, b).

Důkaz.

Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu (tj. kompaktní množině) má na něm maximum a minimum. Pokud by maximum i minimum mělo stejnou hodnotu $f(a) = f(b)$, pak by funkce f byla konstantní a tedy i její derivace by byla nulová ve všech bodech intervalu (a, b).
Předpokládejme tedy, že buď maximum nebo mimimum je jiné a nechť nastává jedno z nich ve vnitřním bodě c. Pak ovšem není možné, aby v c bylo $f'(c) \neq 0$, protože to by v tomto bodě byla funkce f buď rostoucí nebo klesající a jistě by tedy v okolí bodu c nabývala větších i menších hodnot, než je $f(c)$. $\square$

Z Rolleovy věty snadno vyplývá tzv. **věta o střední hodnotě**.

Věta (Lagrangeova)

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz.

Důkaz je prostým zápisem geometrického významu tvrzení: k sečně mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ existuje tečna, která je s ní rovnoběžná (viz obrázek).

Důkaz.

Důkaz je prostým zápisem geometrického významu tvrzení: k sečně mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ existuje tečna, která je s ní rovnoběžná (viz obrázek). Rovnice naší sečny je

$$y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Rozdíl $h(x) = f(x) - g(x)$ udává vzdálenost grafu od sečny (v hodnotách y). Jistě platí $h(a) = h(b)$ a

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podle předchozí věty existuje bod c, ve kterém je $h'(c) = 0$. □

Větu o střední hodnotě můžeme také přepsat ve tvaru:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

a v případě parametricky zadané křivky v rovině, tj. dvojice funkcí $y = f(t)$, $x = g(t)$, je stejný výsledek o existenci rovnoběžné tečny k sečně krajními body popsán takto:

Důsledek (Cauchyova věta o střední hodnotě)

Nechť funkce $y = f(t)$ a $x = g(t)$ jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelné uvnitř tohoto intervalu a $g'(t) \neq 0$ pro všechny $t \in (a, b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Větu o střední hodnotě můžeme také přepsat ve tvaru:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

a v případě parametricky zadané křivky v rovině, tj. dvojice funkcí $y = f(t)$, $x = g(t)$, je stejný výsledek o existenci rovnoběžné tečny k sečně krajními body popsán takto:

Důsledek (Cauchyova věta o střední hodnotě)

Nechť funkce $y = f(t)$ a $x = g(t)$ jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelné uvnitř tohoto intervalu a $g'(t) \neq 0$ pro všechny $t \in (a, b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Všimněte si, že jakkoliv jde o důsledek předchozích tvrzení, zároveň tato tvrzení i zobecňuje ($g(t) = t$).

Důkaz.

Opět spoléháme na použití Rolleovy věty. Položíme proto

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t).$$

Nyní $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, $h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, takže existuje $c \in (a, b)$ takový, že $h'(c) = 0$. Protože je $g'(c) \neq 0$, dostáváme právě požadovaný vztah. □

Věty o střední hodnotě mají celou řadu důsledků týkajících se vlastnosti funkcí. Např.:

- Které funkce mají *nulovou derivaci*? – Pouze *konstantní* funkce.
- Které funkce mají *stejnou derivaci*? – Právě ty funkce, které se navzájem *liší o konstantu*.

Důsledek

Je-li $f(x)$ *diferencovatelná na* (a, b) *a je-li* $f'(x) = 0$ *na* (a, b), *potom*

$$f(x) \equiv c \quad na\ (a, b).$$

Důkaz.

Pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, platí, že $f(x)$ je spojitá na $[x_1, x_2]$ (neboť existuje vlastní $f'(x)$) a diferencovatelná na (x_1, x_2). Podle Lagrangeovy věty je pak pro nějaký bod $c \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

A protože byly body x_1 a x_2 vybrány libovolně v intervalu (a, b), musí být nutně $f(x)$ konstantní na intervalu (a, b). $\square$

Důsledek

Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné na (a, b) a je-li $f'(x) = g'(x)$ na (a, b), potom $f(x) = g(x) + c$ na (a, b), tj. $f(x)$ a $g(x)$ se liší o konstantu.

Důkaz.

Funkce $(f - g)(x)$ je diferencovatelná na (a, b) a $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ na (a, b). Podle předchozího důsledku je pak $f(x) - g(x) \equiv c$ na (a, b), tj. $f(x) = g(x) + c$ na (a, b). $\square$

Plán přednášky

Podobná úvaha jako v posledním tvrzení vede k mimořádně užitečnému nástroji pro počítání limit funkcí. Je znám jako **L'Hospitalovo pravidlo**:

Věta

Předpokládejme, že f a g jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ne však nutně v bodě x_0 samotném, a nechť existují limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pak existuje i limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a jsou si rovny.

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo *nelze použít*, pokud limita podílu derivací *neexistuje*. Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\infty} \right| = 0,$$

ale limita podílu derivací neexistuje, protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} \cos x \qquad \text{(neexistuje)}.$$

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo *nelze použít*, pokud limita podílu derivací *neexistuje*. Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\infty} \right| = 0,$$

ale limita podílu derivací neexistuje, protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} \cos x \qquad \text{(neexistuje)}.$$

- Pravidlo *nelze použít* na typ limity $\frac{\text{cokoliv}}{0}$. Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} \quad \left| \text{typ } \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} \right| = \infty,$$

ale limita podílu derivací je rovna -1.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že v x_0 mají funkce f a g nulovou hodnotu.
Výsledek je opět jednoduše představitelný pomocí obrázku.
Uvažujme body $[g(x), f(x)] \in \mathbb{R}^2$ parametrizované proměnnou x.
Podíl hodnot pak odpovídá směrnici sečny mezi body $[0, 0]$ a $[g(x), f(x)]$. Zároveň víme, že podíl derivací odpovídá směrnici tečny v příslušném bodě. Z existence limity směrnic tečen tedy chceme dovodit existenci limity směrnic sečen.

Důkaz – pokr.

Technicky lze využít věty o střední hodnotě v parametrickém tvaru. Předně si uvědomme, že v tvrzení věty implicitně předpokládáme existenci výrazu $f'(x)/g'(x)$ na nějakém okolí x_0, zejména tedy pro dostatečně blízké body c k x_0 bude $g'(c) \neq 0$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

kde c_x je číslo mezi x_0 a x. Nyní si všimněme, že z existence limity $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ vyplývá, že stejnou hodnotu bude mít i limita libovolné posloupnosti vzniklé dosazením hodnot $x = x_n$ jdoucích k x_0 do $f'(x)/g'(x)$. Zejména tedy můžeme dosadit jakoukoliv posloupnost c_{x_n} pro $x_n \to x_0$ a proto bude existovat i limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ a poslední dvě limity zjevně budou mít stejnou hodnotu. Dokázali jsme tedy, že naše hledaná limita existuje a má také stejnou hodnotu. $\square$

Jednoduše lze rozšířit L'Hospitalovo pravidlo i pro limity v nevlastních bodech $\pm\infty$ a v případě nevlastních hodnot limit. Je-li, např.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

potom je $\lim_{x\to 0_+} f(1/x) = 0$ a $\lim_{x\to 0_+} g(1/x) = 0$. Zároveň z existence limity podílu derivací v nekonečnu dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{(f(1/x))'}{(g(1/x))'} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Použitím předchozí věty tedy dostáváme, že v tomto případě bude existovat i limita podílu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ještě jednodušší je postup při výpočtu limity v případě, kdy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Stačí totiž psát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)},$$

což je již případ pro použití L'Hospitalova pravidla z předchozí věty.

Věta

Nechť f a g jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ne však nutně v bodě x_0 samotném, a nechť existují limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *a* $\lim_{x\to 0} g(x) = \pm\infty$. *Jestliže existuje limita* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *pak existuje i limita* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a jsou si rovny.*

Příklad

1

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Příklad

1.
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

2.
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Plán přednášky

1. Vlastnosti derivací
2. L'Hospitalovo pravidlo
3. Derivace implicitně zadaných funkcí
4. Diferenciál funkce a Taylorův polynom
5. Průběh funkce
   - Konvexnost, konkávnost, inflexe
   - Asymptoty
   - Celkový průběh funkce

Pokud máme zadánu funkci $f(x)$ vzorcem $y = f(x)$, hovoříme o jejím *explicitním* zadání. Obecnějším zadáním funkce je rovnice $F(x, y) = 0$, kde závislá proměnná y představuje „neznámou" funkci. Pokud tuto rovnici nelze (nebo to nepotřebujeme) vyřešit vzhledem k y, pak hovoříme o funkci zadané *implicitně*. Avšak i v tomto obecnějším případě budeme schopni vypočítat $y'(x)$ (aniž bychom znali explicitní vzorec pro $y(x)$), a to pomocí pravidla pro derivaci složené funkce.

Příklad

Rovnice $y^2 = x$ definuje *dvě* diferencovatelné funkce

$$y_1 = \sqrt{x}, \qquad y_2 = -\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad y_2' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Avšak i bez znalosti samotných funkcí y_1 a y_2 lze derivováním rovnice $y^2 = x$ spočítat, že

$$(y^2)' = (x)' \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2y},$$

což je jediný vzorec pro y' obsahující jak y_1 tak y_2.

Příklad

Rovnice $y^2 = x$ definuje *dvě* diferencovatelné funkce

$$y_1 = \sqrt{x}, \qquad y_2 = -\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad y_2' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Avšak i bez znalosti samotných funkcí y_1 a y_2 lze derivováním rovnice $y^2 = x$ spočítat, že

$$(y^2)' = (x)' \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2y},$$

což je jediný vzorec pro y' obsahující jak y_1 tak y_2.

Při derivování implicitně zadaných funkcí obsahuhe výsledná derivace y' jak proměnnou x tak proměnnou y (na rozdíl od *běžného* derivování funkce, kdy je ve výsledku pouze proměnná x).

Příklad

Určete směrnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě $P = [-3, 4]$.

Příklad

Určete směrnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě $P = [-3, 4]$.

Řešení

Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(x^2 + y^2)' = (25)' \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

A proto je směrnice tečny v bodě P (=derivace v bodě P) rovna

$$y' = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Plán přednášky

1. Vlastnosti derivací
2. L'Hospitalovo pravidlo
3. Derivace implicitně zadaných funkcí
4. Diferenciál funkce a Taylorův polynom
5. Průběh funkce
   - Konvexnost, konkávnost, inflexe
   - Asymptoty
   - Celkový průběh funkce

Diferenciál funkce je pojem, který se pro funkce *jedné proměnné* využívá pouze pro potřeby integrování nebo pro přibližné výpočty. Pro funkce *více proměnných* má mnohem větší význam (viz MB103).

Definice

Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ funkce $y = f(x)$. Potom definujeme

- *diferenciál dx* (diferenciál nezávislé proměnné) jako $\boxed{dx = x - x_0}$ (pro x blízko x_0),
- *diferenciál dy* (diferenciál závislé proměnné) jako $\boxed{dy = f'(x_0)\,.\,dx}$.

Alternativní značení pro dy je df, případně $df(x_0)$ pokud chceme zdůraznit, že se jedná o diferenciál v bodě x_0.

Uvědomte si, že pokud je x *napravo* od x_0, je $dx = x - x_0 > 0$, pokud je ale x *nalevo* od x_0, je $dx = x - x_0 < 0$.

Co to vlastně ten diferenciál je?
Pokud se podíváme na rovnici tečny v bodě x_0, máme

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0), \qquad \text{kde } y_0 = f(x_0),$$
$$y - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)\,dx}_{dy} = df(x_0).$$

Co to vlastně ten diferenciál je?
Pokud se podíváme na rovnici tečny v bodě x_0, máme

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)\,(x - x_0), \qquad \text{kde } y_0 = f(x_0), \\ y - f(x_0) &= \underbrace{f'(x_0)\,dx}_{dy} = df(x_0). \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že diferenciál dy je *změna funkčních hodnot na tečně*. A protože hodnoty na tečně aproximují funkční hodnoty $f(x)$ pro x *blízko* bodu x_0, plyne odtud vzoreček pro přibližné výpočty:

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0), \qquad \text{tj.} \qquad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

(Jedná se vlastně o rovnici tečny trošku zapsanou jiným způsobem). Tedy hodnoty funkce $f(x)$ pro x „blízko“ bodu x_0 se přibližně rovnají hodnotám na tečně v bodě x_0, přičemž pro tento výpočet musíme znát hodnotu funkce $f(x_0)$ a derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0.
Diferenciál je tedy *přibližná změna funkčních hodnot* pro x blízko x_0.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{85}$.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{85}$.

Řešení

Protože známe $\sqrt{81} = 9$, položíme $x_0 = 81$ a $x = 85$, tj. $dx = x - x_0 = 4$. Tedy pro $f(x) = \sqrt{x}$ potom je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, a tedy $f(81) = 9$ a $f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$. Ze vzorce pro aproximaci potom plyne, že

$$f(85) \approx f(81) + df(81) = f(81) + f'(81)\,dx, \qquad \text{tj.}$$

$$\sqrt{85} \approx 9 + \frac{1}{18} \cdot 4 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9} = 9.2222\ldots.$$

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{85}$.

Řešení

Protože známe $\sqrt{81} = 9$, položíme $x_0 = 81$ a $x = 85$, tj. $dx = x - x_0 = 4$. Tedy pro $f(x) = \sqrt{x}$ potom je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, a tedy $f(81) = 9$ a $f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$. Ze vzorce pro aproximaci potom plyne, že

$$f(85) \approx f(81) + df(81) = f(81) + f'(81)\,dx, \qquad \text{tj.}$$
$$\sqrt{85} \approx 9 + \frac{1}{18}\cdot 4 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9} = 9.2222\ldots.$$

Pro srovnání je přesná hodnota $\sqrt{85} = 9.2195\ldots.$

Taylorův polynom

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí *lineárního polynomu* slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o *Taylorově polynomu*.

Taylorův polynom

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí *lineárního polynomu* slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o *Taylorově polynomu*.

Definice

Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$ funkce $f(x)$ až do řádu n. *Taylorův polynom stupně n* funkce $f(x)$ se středem *v bodě* x_0 je polynom

$$T(x) = T_n(x) = T_n^f(x) = T_n^f(x; x_0)$$

definovaný jako

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Alternativně zapisujeme Taylorův polynom pomocí sumy

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

přičemž pro $k = 0$ klademe $0! := 1$ a $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Alternativně zapisujeme Taylorův polynom pomocí sumy

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

přičemž pro $k = 0$ klademe $0! := 1$ a $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Poznámka

(i) Taylorův polynom stupně $n = 0$ se středem v bodě x_0 je tedy polynom

$$T_0(x) = f(x_0),$$

tedy jedná se o konstantní funkci.

(ii) Taylorův polynom stupně $n = 1$ se středem v bodě x_0 je tedy polynom

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vidíme tedy, že tento polynom je přesně rovnice tečny nebo také vyjadřuje aproximaci funkce $f(x)$ pomocí diferenciálu .

Příklad

Určete Taylorův polynom pro funkce $f(x) = \sin(x), g(x) = e^x$.

Věta

Nechť $f(x)$ má spojité derivace $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť existuje vlastní derivace $f^{(n+1)}(x)$ na otevřeném intervalu (a, b). Potom pro každý bod $x \in (a, b)$ existuje bod $c \in (a, x)$ tak, že platí rovnost

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad \text{kde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě a.

Důkaz.

Toto důležité tvrzení je důsledkem Rolleovy věty o střední hodnotě. Podrobnosti jsou ve skriptech. □

Poznámka

S rostoucím n se stupeň Taylorova polynomu zvyšuje, až se pro $n \to \infty$ dostáváme v polynomu $T_n(x)$ k součtu nekonečně mnoha členů – tzv. *nekonečné řadě*. Více o tomto tématu probereme později.

Důkaz.

Toto důležité tvrzení je důsledkem Rolleovy věty o střední hodnotě. Podrobnosti jsou ve skriptech. □

Poznámka

S rostoucím n se stupeň Taylorova polynomu zvyšuje, až se pro $n \to \infty$ dostáváme v polynomu $T_n(x)$ k součtu nekonečně mnoha členů – tzv. *nekonečné řadě*. Více o tomto tématu probereme později.

Příklad

Odhadněte chybu v bodě $x = \frac{\pi}{4}$ Taylorova polynomu stupně $n = 6$ funkce $f(x) = \cos x$ se středem v bodě $x_0 = 0$.

Plán přednášky

Monotonie a extrémy

Definice

Funkce $f(x)$ je

- *rostoucí* (resp. *neklesající*) na intervalu I, pokud $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- *klesající* (resp. *nerostoucí*)na intervalu I, pokud $f(x_1) > f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,

Monotonie a extrémy

Definice

Funkce $f(x)$ je

- *rostoucí* (resp. *neklesající*) na intervalu I, pokud $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- *klesající* (resp. *nerostoucí*)na intervalu I, pokud $f(x_1) > f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D(f)$

- *lokální maximum*, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- *lokální minimum*, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0.

Monotonie a extrémy

Definice

Funkce $f(x)$ je

- *rostoucí* (resp. *neklesající*) na intervalu I, pokud $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- *klesající* (resp. *nerostoucí*)na intervalu I, pokud $f(x_1) > f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D(f)$

- *lokální maximum*, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- *lokální minimum*, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0.

Analogicky *ostré lokální maximum (minimum*.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*
3. *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*
3. *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$.
4. *Funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce $f(x)$.

Věta

Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.

Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce $f(x)$.

Věta

Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.

Věta

Nechť x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, tj. $f'(x_0) = 0$, a nechť existuje $f''(x_0)$.

1. *Je-li $f''(x_0) > 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální minimum.*
2. *Je-li $f''(x_0) < 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Pojmy konvexnost, konkávnosti a inflexních bodů slouží ke studiu toho, jak daná funkce (či přesněji její graf) „zatáčí“. Tyto pojmy budeme uvažovat pouze pro diferencovatelné funkce.

Pojmy konvexnost, konkávnosti a inflexních bodů slouží ke studiu toho, jak daná funkce (či přesněji její graf) „zatáčí". Tyto pojmy budeme uvažovat pouze pro diferencovatelné funkce.

Definice

Nechť má funkce $f(x)$ vlastní derivaci na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Funkce $f(x)$ se nazývá

- *konvexní na intervalu* I, pokud je $f'(x)$ neklesající na I,
- *konkávní na intervalu* I, pokud je $f'(x)$ nerostoucí na I.

Poznámka

To, že funkce $f'(x)$ je neklesající na intervalu I (tj. $f(x)$ je *konvexní*), znamená, že tečny mají „neklesající směrnici“, tj.

graf funkce $f(x)$ *zatáčí doleva* a tečny leží *pod grafem*.

To, že funkce $f'(x)$ je nerostoucí na intervalu I (tj. $f(x)$ je *konkávní*), znamená, že tečny mají „nerostoucí směrnici“, tj.

graf funkce $f(x)$ *zatáčí doprava* a tečny leží *nad grafem*.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.
3. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $(-\infty, 0]$ funkce klesající (tudíž nerostoucí). A proto je x^3 konkávní na $(-\infty, 0]$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.
3. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $(-\infty, 0]$ funkce klesající (tudíž nerostoucí). A proto je x^3 konkávní na $(-\infty, 0]$.
4. Funkce $f(x) = ax + b$ má derivaci $f'(x) = a$, což je funkce konstantní (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je $ax + b$ konvexní na $\mathbb{R}$. Současně je konstantní funkce $f'(x) = a$ nerostoucí na $\mathbb{R}$, a proto je $ax + b$ také konkávní na $\mathbb{R}$.

Konvexnost a druhá derivace

Věta

Nechť $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ *je otevřený interval a nechť má funkce* $f(x)$ *druhou derivaci* $f''(x)$ *na* I.

(i) *Je-li* $f''(x) > 0$ *na* I, *potom je* $f(x)$ *konvexní na intervalu* I.

(ii) *Je-li* $f''(x) < 0$ *na* I, *potom je* $f(x)$ *konkávní na intervalu* I.

Konvexnost a druhá derivace

Věta

Nechť $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ je otevřený interval a nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci $f''(x)$ na I.

(i) *Je-li $f''(x) > 0$ na I, potom je $f(x)$ konvexní na intervalu I.*

(ii) *Je-li $f''(x) < 0$ na I, potom je $f(x)$ konkávní na intervalu I.*

Důkaz.

ad (i): Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, potom je funkce $f'(x)$ rostoucí na intervalu I. Tedy je přímo podle definice funkce $f(x)$ konvexní na intervalu I. $\square$

Inflexní bod

Tam, kde se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, se nacházejí tzv. inflexní body funkce.

Definice

Nechť má funkce $f(x)$ vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x_0)$. Je-li $f'(x_0)$ nevlastní, potom navíc předpokládejme, že je $f(x)$ spojitá v bodě x_0. Bod x_0 je *inflexní bod* funkce $f(x)$, pokud v nějakém levém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konvexní a v nějakém pravém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konkávní, nebo naopak.

Vlastnosti inflexních bodů

Věta

(i) *Pokud existuje vlastní druhá derivace* $f''(x_0) = 0$ *v inflexním bodě* x_0, *potom je* $f''(x_0) = 0$.

(ii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f''(x)$ *mění znaménko v bodě* x_0, *potom je* x_0 *inflexní bod.*

(iii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f'''(x_0) \neq 0$, *potom je* x_0 *inflexní bod.*

Vlastnosti inflexních bodů

Věta

(i) *Pokud existuje vlastní druhá derivace* $f''(x_0) = 0$ *v inflexním bodě* x_0, *potom je* $f''(x_0) = 0$.

(ii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f''(x)$ *mění znaménko v bodě* x_0, *potom je* x_0 *inflexní bod.*

(iii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f'''(x_0) \neq 0$, *potom je* x_0 *inflexní bod.*

Zejména část (ii) v předchozí větě ukazuje, jak inflexní body najít. Současně ze změny znaménka $f''(x)$ (tedy jestli se jedná o změnu z $\ominus$ do $\oplus$ nebo o změnu z $\oplus$ do $\ominus$) poznáme, kterým směrem graf funkce $f(x)$ v bodě x_0 „zatáčí".

Příklad

Určete monotonii, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost a inflexní body funkce

$$f(x) = x + \sin x \qquad \text{na intervalu } [0, 4\pi].$$

Příklad

Určete monotonii, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost a inflexní body funkce

$$f(x) = x + \sin x \qquad \text{na intervalu } [0, 4\pi].$$

Řešení

$f'(x) = 1 + \cos x = 0$ implikuje, že $\cos x = -1$, tedy $x = \pi, 3\pi$ jsou *stacionární body* (v intervalu $[0, 4\pi]$). Body, kde neexistuje $f'(x)$ nejsou. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f'(x)$ v těchto intervalech. Tedy

$$f(x) \text{ je rostoucí na } [0, 4\pi],$$
$$f(x) \text{ nemá lokální extrémy.}$$

Řešení příkladu – pokr.

Řešení

$f''(x) = -\sin x = 0$ implikuje, že $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ jsou kandidáti na inflexní body. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f''(x)$ v těchto intervalech. Tedy

$$\begin{gathered} f(x) \text{ je konvexní na } [\pi, 2\pi] \text{ a na } [3\pi, 4\pi], \\ f(x) \text{ je konkávní na } [0, \pi] \text{ a na } [2\pi, 3\pi], \\ f(x) \text{ má inflexi v bodech } x = \pi, 2\pi, 3\pi. \end{gathered}$$

A protože můžeme jednoduše vypočítat funkční hodnoty a hodnoty derivace (pro sklon tečny) ve zmiňovaných stacionárních, inflexních a krajních bodech, můžeme také načrtnout graf této funkce na intervalu $[0, 4\pi]$.

Asymptoty

Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Asymptoty

Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Definice

- Přímka $x = x_0$ (svislá přímka) je *asymptotou bez směrnice* funkce $f(x)$, pokud je alespoň jedna jednostranná limita v bodě x_0 nevlastní, tj.
  $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Asymptoty

Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Definice

- Přímka $x = x_0$ (svislá přímka) je *asymptotou bez směrnice* funkce $f(x)$, pokud je alespoň jedna jednostranná limita v bodě x_0 nevlastní, tj.
  $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
- Přímka $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) je *asymptotou se směrnicí v* ∞, pokud
  $$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$
  Podobně pro asymptotu se směrnicí v $-\infty$.

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{ typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty} \right| = 0.$$

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{ typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty} \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

Poznámka

Je zřejmé, že asymptoty bez směrnice mohou být pouze v bodech nespojitosti funkce $f(x)$. Samozřejmě ne každý bod nespojitosti zadává asymptotu, viz např. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ v $x_0 = 0$.

Asymptoty se směrnicí

Věta

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce $f(x)$ v ∞ $\Leftrightarrow$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax].$$

Podobně, přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce $f(x)$ v $-\infty$ $\Leftrightarrow$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax].$$

Důkaz.

Býti asymptotou v ∞ znamená, že $f(x) \approx ax + b$ pro $x \to \infty$. Tedy pokud obě strany podělíme výrazem x, dostaneme, že

$$\frac{f(x)}{x} \approx a + \frac{b}{x} \qquad \text{pro } x \to \infty.$$

A protože výraz $\frac{b}{x} \to 0$ pro $x \to \infty$, dostáváme odtud vzoreček pro hodnotu koeficientu a.
Dále, známe-li koeficient a, potom

$$f(x) - ax \approx b \qquad \text{pro } x \to \infty.$$

□

Samozřejmě, pokud alespoň jedna z limit definujících koeficienty a, b je *nevlastní* nebo *neexistuje*, tak potom daná funkce asymptotu v příslušném ∞ nebo $-\infty$ *nemá*.

Příklad

Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Příklad

Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Řešení

$x = -2$ je asymptota bez směrnice.

Příklad

Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Řešení

$x = -2$ je asymptota bez směrnice.
$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \cdots = 1$, $b_+ = \cdots = -10$. Podobně pro $x \to -\infty$. Proto $y = x - 10$ je asymptota v ∞ i v $-\infty$.

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,
- hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných“ bodech (např, stacionárních a inflexních bodech, kde neexistuje $f'(x)$ nebo $f''(x)$, v krajních bodech, atd.),

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,
- hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných" bodech (např, stacionárních a inflexních bodech, kde neexistuje $f'(x)$ nebo $f''(x)$, v krajních bodech, atd.),
- a nakonec ze všech těchto informací sestrojíme graf funkce $f(x)$.

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice
- $f(x)$ nemá žádnou asymptotu se směrnicí

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice
- $f(x)$ nemá žádnou asymptotu se směrnicí
- Hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných" bodech:
  $f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \approx 1.19, \quad f'(2) = \frac{1}{4}.$