Cvičení

1. Podobným postupem jako v textu této části najděte

   (a) průměrný počet líců, které padnou při n hodech mincí (se stejnou pravděpodobností rubu i líce),

   (b) průměrný počet šestek, které padnou při n hodech kostkou,

   (c)* průměrnou hodnotu výrazu $(i-6)^2$, kde i je počet hodů do první šestky (to je jakási míra „typické odchylky“ od průměrného počtu hodů, tj. od 6).

12.6 Náhodná procházka

Představme si číselnou osu nakreslenou v rovině, na níž jsou celá čísla vyznačena kroužky. Po těchto kroužcích se bude pohybovat figurka podle následujících pravidel náhodné procházky:

- Na začátku (před prvním tahem) stojí figurka v čísle 1.
- V každém tahu se pohne z čísla, kde právě stojí, buď o 2 čísla doprava nebo o 1 číslo doleva. Jedna z těchto možností se vždy zvolí náhodně, a obě možnosti mají stejnou pravděpodobnost (tj. jako bychom hodili mincí a rozhodli se podle výsledku hlava/orel).

12.6.1 Úloha. *Jaká je pravděpodobnost, že figurka vůbec někdy dospěje do čísla* 0*?*

Nejdříve je potřeba vyjasnit, co se vůbec takovou pravděpodobností míní. Je celkem zřejmé, jak definovat pravděpodobnost, že se figurka aspoň jednou octne v 0 během prvních řekněme 7 tahů (označme ji P_7): Prvních 7 tahů náhodné procházky má 2^7 různých možných průběhů, protože v každém tahu se rozhodne mezi dvěma možnostmi, a tato rozhodnutí lze libovolně zkombinovat. Podle pravidla náhodné procházky v naší úloze jsou všechny tyto průběhy stejně pravděpodobné. Výše zmíněná pravděpodobnost P_7 bude potom rovna počtu takových průběhů, které projdou 0 (čtenář si může ověřit, že je jich 75), dělenému celkovým počtem průběhů, tj. 2^7.

Hledanou pravděpodobnost P v naší úloze potom můžeme definovat jako limitu $P = \lim_{i\to\infty} P_i$, kde definice P_i byla objasněna výše pro $i = 7$ (tato limita určitě existuje, protože zřejmě $P_1 \le P_2 \le \ldots$).

Nechť a_i značí počet průběhů prvních i tahů náhodné procházky takových, že figurka dorazí do 0 po i-tém tahu, a zároveň nikdy předtím (tj. před 1., 2.,…, i-tým tahem) v 0 nebyla. Platí tedy

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}.$$

Zavedeme-li vytvořující funkci $a(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$, máme $P = a(\frac{1}{2})$.

Pro řešení úlohy bude užitečné podívat se i na procházky, které začínají v jiných číslech než 1 (ale pokračují podle stejného pravidla). Jaký bude například počet procházek začínajících v čísle 2, které dospějí poprvé do 0 v i-tém tahu (označme jej třeba b_i)? Aby taková procházka došla do 0, musí nejprve po nějakém j-tém tahu, $1 \le j < i$, poprvé dosáhnout čísla 1, a potom v dalších $i-j$ tazích poprvé vstoupit do 0. Pro dosažení čísla 1 poprvé v j-tém kroku je a_j možností, (jde totiž pouze o „posunutou kopii“ procházky, která by začala v 1 a po j tazích došla do 0). Je-li figurka v j-tém kroku v 1, má ještě a_{i-j} možností dosažení 0 po $i-j$ dalších tazích. Celkem tedy dostaneme[7]

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j a_{i-j},$$

v řeči vytvořujících funkcí to znamená $b(x) = a(x)^2$.

Analogicky, c_i bude počet procházek začínajících v čísle 3, jež poprvé dorazí do 0 po i tazích. Podobně jako v předchozím nahlédneme že $c(x) = a(x)b(x) = a(x)^3$.

Zkoumejme teď procházky začínající v 1 z trochu jiného pohledu. Při prvním tahu můžeme rovnou dojít do 0 (což dává $a_1 = 1$), nebo se octneme v čísle 3, a potom máme c_{i-1} možností, jak poprvé vstoupit

[7] Všimněte si, že jsme podstatně využili toho, že doleva se chodí vždy jen o 1, takže se nelze dostat z 2 do 0 a přitom přeskočit 1.

do 0 po dalších $i-1$ tazích. Pro $i>1$ tedy $a_i = c_{i-1}$. Převedeno na vztah mezi vytvořujícími funkcemi

$$a(x) = x + xc(x) = x + xa(x)^3. \tag{12.8}$$

Speciálně pro $x = \frac{1}{2}$ odtud dostaneme pro $P = a(\frac{1}{2})$ rovnici

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P^3.$$

Ta má tři řešení, $1, (\sqrt{5}-1)/2$ a $-(\sqrt{5}+1)/2$. Záporné řešení můžeme vyloučit ihned, a ani 1 nemůže být odpovědí v naší úloze (řada pro $a(x)$ má nezáporné koeficienty a konverguje pro $x = \frac{1}{2}$, tedy definuje spojitou rostoucí funkci na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, a proto hodnota $a(\frac{1}{2})$ je nejmenší kladný kořen naší rovnice – rozmyslete si a případně nakreslete obrázek). Zbývá tedy $P = (\sqrt{5}-1)/2 = 0{,}618033988\ldots$ a jedině toto číslo může být hledaná hodnota P (zase zlatý řez!).

Z rovnice (12.8) bychom v principu mohli spočítat i funkci $a(x)$ a potom se snažit vyjádřit čísla a_i třeba pomocí jejího Taylorova rozvoje (což je ale dost pracné). Půvab výše uvedeného řešení je v tom, že jsme nic takového dělat nepotřebovali.

Cvičení

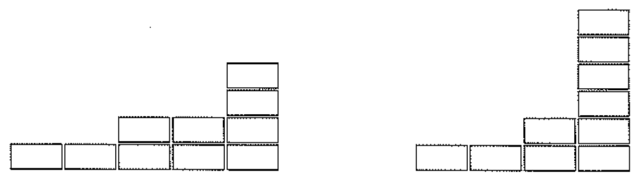
1. Uvažme náhodnou procházku začínající v 0, při níž se postupuje o 1 číslo doleva nebo o 1 číslo doprava, každá volba má pravděpodobnost $\frac{1}{2}$.
   (a)* Dokažte, že s pravděpodobností 1 se někdy vrátíme do 0.
   (b) Dokažte, že každé číslo k někdy navštívíme, s pravděpodobností 1.

12.7 Rozklady

Kolika způsoby můžeme napsat přirozené číslo n jako součet několika přirozených čísel? Odpověď není těžká, pokud počítáme *uspořádané rozklady*, což znamená, že zápisy $3 = 2+1$ a $3 = 1+2$ považujeme za dva různé rozklady čísla 3 (cvičení 1). Mnohem těžší a zajímavější otázku dostaneme, považujeme-li za stejné dva rozklady, jež se

liší pouze pořadím sčítanců (v tomto případě budeme v tomto oddílu mluvit prostě o *rozkladech čísla n*). Například pro $n=5$ jsou všechny možné rozklady $5 = 1+1+1+1+1$, $5 = 1+1+1+2$, $5 = 1+2+2$, $5 = 1+1+3$, $5 = 2+3$, $5 = 1+4$ a $5 = 5$. Označme p_n počet rozkladů čísla n v tomto smyslu.

Abychom učinili zápis rozkladu jednoznačným, můžeme například požadovat, aby sčítance byly seřazeny vzestupně, jako jsme je psali v seznamu všech rozkladů čísla 5. Takže jiná formulace otázky o počtu rozkladů je: Kolika způsoby můžeme postavit z n cihel „neklesající zeď" jako na následujícím obrázku (který odpovídá rozkladům $10 = 1+1+2+2+4$ a $10 = 1+1+2+6$)?



(Takový obrázek se nazývá *Ferrersův diagram* daného rozkladu.)

Definice p_n vypadá jednoduše, takže čtenáře, ze středoškolských příkladů třeba zvyklého, že na všechno je vzoreček, může překvapit, že pro p_n žádný jednoduchý vzorec, něco jako třeba binomický koeficient, není. Problém odhadu čísla p_n se studoval v teorii čísel, a v roce 1918 ho s neuvěřitelnou přesností vyřešili Hardy a Ramanujan. (Tuto historii popisuje Littlewood v knížečce [18], jíž můžeme doporučit jako skvělé čtení o matematice.) Dokonce objevili přesný (ale komplikovaný) vzorec pro p_n. Porozumění tomuto výsledku, nemluvě o jeho důkazu, vyžaduje poměrně hluboké znalosti z teorie čísel (viz například Andrews [2]). Tady budeme mnohem skromnější: poměrně dobré asymptotické odhady pro p_n se dají dokázat jednoduše, i když rafinovaně, pomocí vytvořujících funkcí, a to zde předvedeme.

Už víme, jak vyjádřit počet řešení rovnice

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n,$$

s hodnotami každé proměnné i_j ležícími v nějaké předepsané množině, jako koeficient u x^n ve vhodném výrazu. Pro náš problém ale nezáleží na pořadí těch i_j, takže není vidět, jak to uvést do souvislosti s (neuspořádanými) rozklady čísla n. Trik je považovat i_j za *příspě-*