Jméno a příjmení:	

Příklad číslo:	1	2	3	4	$\sum$
Počet bodů:					

Příklad 1. *Marek a Honza přichází plavat do městského bazénu vždy v pondělí někdy mezi polednem a šestou hodinou večerní. Marek stráví v bazénu hodinu a půl, Honza hodinu (bazén je otevřen do desáté hodiny večerní). Jaká je pravděpodobnost, že v dané pondělí odejde Marek z bazénu později?*

Řešení. $\frac{72+(72-\frac{121}{2})}{144} = \frac{83{,}5}{144} \doteq 0,58.$ □

Příklad 2. *Určete průnik vektorových prostorů $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$, kde $V_1 = \langle(4,0,3,2),(4,-2,-1,0),(5,-1,1,1)\rangle$ a $V_2 = \langle(2,-1,1,4),(3,-2,0,3),(2,-3,0,2)\rangle$.*

Příklad 3. *Uvažujte následující Leslieho model: farmář chová ovce. Porodnost ovcí je dána pouze věkem a je průměrně 2 ovce na jednu ovci mezi jedním a dvěma lety věku, pět ovcí na ovci mezi dvěma a třemi lety věku a dvě ovce na ovci mezi třemi a čtyřmi roky věku. Ovce do jednoho roku nerodí. Z roku na rok umře vždy polovina ovcí a to rovnoměrně ve všech věkových skupinách. Po čtyřech letech posílá farmář ovce na jatka. Farmář by rád ještě prodával (živá) jehňátka do jednoho roku na kožešinu. Jakou část jehňátek může každý rok prodat, aby mu velikost stáda zůstávala z roku na rok stejná? V jakém poměru budou potom rozděleny počty ovcí v jednotlivých věkových skupinách? Měli byste ještě nějakou radu pro farmáře?*

Řešení. Matice daného modelu (bez zásahu farmáře) je

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Farmář může ovlivnit kolik ovcí do jednoho roku mu ve stádu zůstane do dalšího roku, může tedy ovlivnit prvek l_{12} matice L. Zkoumáme tedy model

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

a hledáme a tak, aby daná matice měla vlastní hodnotu 1 (víme, že má pouze jednu reálnou kladnou). Charakteristický polynom této matice je

$$\lambda^4 - 2a\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda - \frac{1}{2},$$

požadujeme-li, aby měl kořen 1, musí být $a = \frac{1}{5}$ (dosadíme za λ číslo 1 a položíme rovno nule). Farmář tedy může prodat $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ ovcí, které se mu v daný rok narodí. Odpovídající vlastní vektor k vlastnímu číslu 1 dané matice je $(20,4,2,1)$ a v těchto poměrech se taky ustálí populace ovcví. Na jatka posílat ovce už po třech letech. □

Příklad 4. *Určete kosinus odchylky stěn pravidelného čtyřstěnu.*

Řešení. Odchylku dvou rovin můžeme spočítat jako odchylku dvou vektorů daných jako průnik daných rovin s rovinou kolmou na jejich průsečnici. Uvážíme-li např. roviny ABC a ABD, tak jejich průsečnicí je přímka AB a rovinou kolmou na ni je např. rovina CDS, kde S je střed AB. Odchylka vybraných rovin je tedy dána odchylkou vektorů $\vec{SC}$ a $\vec{SD}$. Pata výšky P daného čtyřstěnu z bodu D leží v těžišti stěny ABC, tedy na její těžnici SC a to v její třetině. Hledaný úhel ϕ je tedy úhlem v pravoúhlém trojúhelníku SPD u vrcholu S. Dle volby $|SD| = v$, $|SP| = \frac{1}{3}v$, tedy $\cos(\phi) = \frac{1}{3}$ □