Sbírka příkladů do cvičení
MB102 - podzim 2012

Cvičení 1: Lagrangeova interpolace, Pojem funkce, Zavedení pojmu limita

Teorie: V prvním cvičení se budeme věnovat základním funkcím. Zkuste si tyto příklady vyřešit, protože celý semestr se na chování jednotlivých typů funkcí budeme odkazovat. Půjde hlavně o funkce polynomiální, racionální lomené, mocninné, logaritmické, exponencionální, goniometrické a cyklometrické.

Polynomům se budeme více věnovat v předmětu MB104. Zde pro nás budou důležitým nástrojem pro interpolaci. Představme si následující problém. Máme v rovině několik bodů a chceme jimi proložit funkci, protože s funkcemi umíme celkem hezky pracovat. Takovou hezkou funkcí je polynomiální funkce a navíc budeme chtít, aby prokládaný polynom byl co možná nejnižšího stupně. Tomuto proložení (interpolaci) říkáme Lagrangeova interpolace.

Protože polynom n-tého stupně má $n+1$ koeficientů, potřebujeme vždy $n+1$ kontrolních bodů k určení Lagrangeova polynomu stupně n. Dostaneme tak soustavu $n+1$ rovnic o $n+1$ neznámých.

Druhou možnost výpočtu Lagrangeova interpolačního polynomu nám dává následující věta:

Věta 1. *Nechť je dáno $n+1$ kontrolních bodů v rovině $[x_i, y_i]$, $i = 0, \dots, n$. Potom Lagrangeův interpolační polynom procházející těmito body je tvaru*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x),$$

kde

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\dots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\dots\cdot(x_i-x_n)}.$$

Poslední látkou, která nás čeká v úvodním cvičení je limita posloupnosti.

Definice 1. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má limitu L, jestliže pro **každé** $\varepsilon > 0$ **existuje** $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro **všechna** $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ platí, že $|a_n - L| < \varepsilon$

Definice 2. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverguje k ∞, jestliže pro **každé** $K > 0$ **existuje** $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro **všechna** $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ platí, že $a_n > K$.

Definice 3. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverguje k $-\infty$, jestliže pro **každé** $K < 0$ **existuje** $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro **všechna** $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ platí, že $a_n < K$.

Příklad 1. Určete definiční obor funkcí:

1. $f(x)=\sqrt{3x-x^3}$
2. $f(x)=\ln\left(9-x^2\right)$
3. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$
4. $f(x)=(x+|x|)\cdot\sqrt{x\sin^2 \pi x}$
5. $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x}$
6. $f(x)=\log_2 \log_3 \log_4 x$
7. $f(x)=\sqrt[4]{\ln \operatorname{tg} x}$
8. $f(x)=\arcsin \log \frac{x}{10}$

Výsledek.

1. $(\infty;-\sqrt{3}\rangle\cup\langle\sqrt{3},0\rangle$
2. $(-3,3)$
3. $\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{N}$
4. $\mathbb{R}_0^+\cup\mathbb{Z}^-$
5. $\langle -\frac{1}{3},1\rangle$
6. $(4,\infty)$
7. $(4k+1)\frac{\pi}{4}\leq x<(2k+1)\frac{\pi}{2}$
8. $x\in\langle 1,10\rangle$

Příklad 2. Načrtněte grafy funkcí:

1. $f(x)=3-x$
2. $f(x)=-2x^2+8x-5$
3. $f(x)=\frac{2x-4}{1-x}$
4. $f(x)=\sqrt{1-x}+2$
5. $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3-x)$
6. $f(x)=1+\ln(x^2-4x+4)$
7. $f(x)=1+2^{2-3x}$
8. $f(x)=2-\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1}$
9. $f(x)=1+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$
10. $f(x)=3-2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$
11. $f(x)=1+\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$
12. $f(x)=2-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$
13. $f(x)=\frac{7}{4}\pi+2\arcsin\left(\frac{1}{2}-2x\right)$
14. $f(x)=\pi-\frac{1}{2}\arccos\left(3x+1\right)$
15. $f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1-2x)$
16. $f(x)=1+\operatorname{arccotg}(2x+3)$

Příklad 3. Rozhodněte, zda jsou dané funkce sudé nebo liché. Svá tvrzení řádně zdůvodněte.

1. $f(x)=\frac{3x-1}{6x-2}$
2. $f(x)=x-\sin x$
3. $f(x)=x^2-3\cos|x|$
4. $f(x)=\ln|x|$
5. $f(x)=\frac{2^{|x|}}{x^3}$
6. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|+1}\cdot\frac{\sin 3x}{x}$

Výsledek.

1. Ani sudá, ani lichá
2. Lichá
3. Sudá
4. Sudá
5. Lichá
6. Sudá

Příklad 4. Pomocí Lagrangeovy interpolace proložte polynom body

1. $[-1,-9]$, $[1,-3]$, $[2,3]$
2. $[-1,10]$, $[1,4]$, $[4,25]$
3. $[-1,3]$, $[0,-3]$, $[1,3]$, $[2,15]$
4. $[-1,-3]$, $[0,-8]$, $[1,5]$, $[2,6]$

Výsledek.

1. x^2+3x-7
2. $2x^2-3x+5$
3. $-x^3+6x^2+x-3$
4. $-5x^3+9x^2+9x-8$

Příklad 5. Rozložte dané racionální lomené funkce na parciální zlomky:

1. $f(x)=\frac{3x^2-6x+2}{x^3-2x^2+x}$
2. $f(x)=\frac{2x^2-x+3}{(x-1)\cdot(x^2+3)}$
3. $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+x}$
4. $f(x)=\frac{2x^3+2x-1}{2x^4-x^3}$
5. $f(x)=\frac{x^3+3x^2+x+1}{x^3+x^2+x}$
6. $f(x)=\frac{x^5+x^4-2x^3+6x^2-3x+1}{x^3-x^2+x}$
7. $f(x)=\frac{3x^3+3x^2-1}{x\cdot(x^2+1)\cdot(2x+1)}$
8. $f(x)=\frac{2x^5+x^3-1}{x^2+2x^4}$

Výsledek.

1. $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x}$
2. $f(x)=\frac{x}{x^2+3}+\frac{1}{x-1}$
3. $f(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$
4. $f(x)=\frac{1}{x^3}+\frac{2}{2x-1}$
5. $f(x)=1+\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x}$
6. $f(x)=x^2+2x-1+\frac{1}{x}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}$
7. $f(x)=\frac{1}{2x+1}+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{1}{x}$
8. $f(x)=x+\frac{2}{2x^2+1}-\frac{1}{x^2}$

Příklad 6. Napište prvních 5 členů posloupnosti dané rekurentním vztahem $a_{n+1}=a_n+(1-n)$, $a_1=-1$ a zjistěte, zda je dané posloupnost monotónní a ohraničená. Dále se pokuste určit obecný vzorec této posloupnosti a dokažte ho matematickou indukcí.

Výsledek. $-1, -1, -2, -4, -7$; posloupnost je nerostoucí a shora ohraničená, $a_n = -\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$.

Příklad 7. Pro $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ určete $N \in \mathbb{N}$ z definice limity tak, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, platilo, že $|x_n| < \varepsilon$:

1. $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
2. $x_n = \frac{2n}{n^3+1}$

Příklad 8. Přímo z definice limity dokažte, že

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^n} = \infty$
2. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{3-2n} = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{2-3n} = -1$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{3-n^2}{2} = -\infty$

Příklad 9. Vypočtěte:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^2+1}$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot \sin n!}{n+1}$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$
5. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-3n^2+6n-10}{2n^3-3}$
8. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5+5n^4+6n^2-3}{2-n^3-8n^5}$

Výsledek.

1. 0
2. 0
3. 0
4. $\frac{1}{3}$
5. 1
6. 0
7. $\frac{1}{2}$
8. $-\frac{3}{8}$

Cvičení 2: Limita a spojitost funkce

Teorie:

Podobně, jako jsme definovali limitu posloupnosti, definujeme limitu funkce:

Definice 4 (Vlastní limita ve vlastním bodě)**.** Řekneme, že má funkce f vlastní limitu L ve vlastním bodě x_0, jestliže pro **každé** $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x taková, že $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, platí, že $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Počítat limity budeme různými způsoby. Většinou bude nutné funkci nejprve nějakým způsobem upravit, či aplikovat tvrzení o součtu, rozdílu, součinu či podílu limit. Ve všech příkladech tohoto cvičení si poradíme bez užití L'Hospitalova pravidla.

Pokud však chceme dokázat, že funkce v daném bodě limitu nemá, většinou si vystačíme s výpočtem obou jednostranných limit a v případě jejich nerovnosti dostaneme, že funkce v daném bodě limitu nemá.

Definice 5. Řekneme, že funkce je spojitá v bodě, jestliže je v tomto bodě definována a má v tomto bodě limitu, která je rovna funkční hodnotě v tomto bodě.

Rozlišujeme odstranitelnou nespojitost a nekonečnou nespojitost. Odstranitelná nespojitost je taková, kde z nespojité funkce uděláme spojitou pouze dodefinováním spočetně mnoha funkčních hodnot.

Příklad 10. Formulujte definici

1. vlastní limity v nevlastním bodě ∞
2. vlastní limity v nevlastním bodě $-\infty$
3. nevlastní limity ∞ ve vlastním bodě
4. nevlastní limity $-\infty$ ve vlastním bodě
5. nevlastní limity ∞ v nevlastním bodě ∞
6. nevlastní limity ∞ v nevlastním bodě $-\infty$
7. nevlastní limity $-\infty$ v nevlastním bodě ∞
8. nevlastní limity $-\infty$ v nevlastním bodě $-\infty$

Příklad 11. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení. V případě nepravdivosti nalezněte protipříklad:

1. Funkce je spojitá v bodě právě tehdy, když má v tomto bodě limitu.
2. Je-li funkce spojitá v bodě, potom má v tomto bodě limitu.
3. Má-li funkce v daném bodě limitu, potom je v tomto bodě spojitá.
4. Má-li funkce v bodě obě jednostranné limity, potom má v tomto bodě i limitu.

Příklad 12. Uveďte příklad funkce,

1. která je spojitá v každém reálném bodě
2. která není spojitá v žádném reálném bodě

Příklad 13. Vypočtěte následující limity:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^n}{1-x^m}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$
4. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3-2x}{2+5x}\right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{3+2x^2}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$
7. $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2-1})$
8. $\lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$
9. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$
10. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$
11. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^3}{1+x^3} + 3^{\frac{1}{x}}\right)$
12. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$
13. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$
14. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$
16. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Výsledek.

1. 0
2. 0
3. $\frac{n}{m}$
4. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
5. $\frac{1}{2}$
6. $\frac{1}{2}$
7. 0
8. -12
9. 2
10. 1

11. 4
12. $\frac{2}{3}$
13. 3
14. $\frac{1}{3}$
15. 1
16. 1

Příklad 14. Najděte body nespojitosti následujících funkcí a určete charakter těchto nespojitostí.

1. $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$
2. $f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$
3. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$
4. $f(x) = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$

Výsledek.

1. $x = -1$ je bod nekonečné nespojitosti
2. $x = -1$ je bod odstranitelné nespojitosti
3. $x = -2$, $x = 1$ jsou body nekonečné nespojitosti
4. $x = 0$, $x = 1$ body odstranitelné nespojitosti, $x = -1$ bod nekonečné nespojitosti

Příklad 15. Uveďte příklad funkce, která má v bodech $-1; 0; 1$ odstranitelnou nespojitost, je na intervalu $(-\infty, -3)$ rostoucí a spojitá, na intervalu $(3, \infty)$ klesající a spojitá a má v bodech $2; -2$ nekonečnou nespojitost.

Příklad 16. Dokažte, že funkce $f(x) = 1 + x^2 \cdot \arcsin x - \ln(|x| + 1)$ protíná osu x.

Příklad 17. Dokažte, že má polynom $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x + 7$ reálný kořen.

Cvičení 3: Derivace funkce

U této kapitoly si moc teorie nepřipomeneme. Základem úspěchu v tomto cvičení je zapamatování si základních vztahů pro derivace elementárních funkcí.

Na konci cvičení se dostaneme k tečnám ke grafům daných funkcí a k odchylce daných funkcí. Odchylkou dvou funkcí rozumíme odchylku tečen ve společném bodě. Tečna ke grafu funkce v daném bodě $[x_0, y_0]$ má rovnici $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Příklad 18.

1. Určete $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2 \cdot \sin(x-2)$.
2. Určete $f'(1)$, je-li $f(x) = x + (x-1) \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

Výsledek.

1. 4
2. $1 + \frac{\pi}{4}$

Příklad 19. Dokažte, že

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

Příklad 20. Najděte derivace následujících funkcí.

1. $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$
3. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$
4. $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$
5. $f(x) = e^{-x^2}$
6. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
7. $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x \sin x}$
8. $f(x) = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}$
9. $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
10. $f(x) = x \cdot (\sin \ln x - \cos \ln x)$
11. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$
12. $f(x) = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}$
13. $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$
14. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$
15. $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$
16. $f(x) = \frac{(\ln 3)\sin x + \cos x}{3^x}$
17. $f(x) = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$
18. $f(x) = \ln \ln \ln x$

Výsledek.

1. $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$
2. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$
3. $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$
4. $-\frac{1}{x^2} 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \frac{1}{cos^2\frac{1}{x}} \ln 2$
5. $-2xe^{-x^2}$
6. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
7. $\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$
8. $\frac{1}{x(1+x^4)^2}$
9. $\frac{1}{\sin x}$
10. $2\sin\ln x$
11. $-\frac{1}{\cos x}$
12. $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$
13. $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$
14. $\frac{1}{1+x^2}$
15. $-\frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$
16. $-\frac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$
17. $e^x\left(1+e^{e^x}\left(1+e^{e^{e^x}}\right)\right)$
18. $\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$

Příklad 21. Z rovnice tečny ke grafu funkce v daném bodě odvoďte rovnici normály ke grafu funkce v témže bodě.

Příklad 22. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bodě $T[0;?]$.

Výsledek. $t: x+y-1=0$, $n: x-y+1=0$

Příklad 23. Je dána funkce $f(x) = x\ln x$ a přímka $p: 2x-2y+3=0$. Určete rovnici normály rovnoběžné s přímkou p ke grafu funkce f.

Výsledek. $n: x-y-3e^{-2}=0$

Příklad 24. Pod jakým úhlem se protínají grafy funkcí $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \cos x$ na intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$?

Výsledek. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \doteq 70°31'$.

Příklad 25. Určete všechny hodnoty reálného parametru a tak, aby graf funkce $f: y = \frac{ax-x^3}{4}$ protínal osu x pod úhlem $\frac{\pi}{4}$.

Výsledek. Pouze $a=4$.

Příklad 26. Určete všechny body, ve kterých je tečna ke grafu funkce $f: y = 2+x-x^2$ rovnoběžná

1. s osou x.
2. s osou prvního kvadrantu.

Výsledek. 1. $[\frac{1}{2}; \frac{9}{4}]$ 2. $[0; 2]$

Cvičení 4: Neurčité výrazy a výpočet limit, Taylorův polynom, diferenciál funkce

Teorie: V tomto cvičení pro nás bude důlžité L'Hospitalovo pravidlo, které nám říká, že pokud máme limitu podílu dvou funkcí typu $\frac{0}{0}$, nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, potom je tato limita rovna limitě podílu derivací těchto funkcí.

L'Hospitalovo pravidlo můžeme využít i při výpočtech limit typu $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 a ∞^0. Limitu funkcí těchto tvarů však musíme nejprve vhodně upravit na tvar $\frac{0}{0}$, nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Dále se budeme věnovat v tomto cvičení Taylorově polynomu. Taylorova věta nám říká, že pokud má funkce f všechny derivace až do řádu n v bodě a, potom můžeme psát

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n.$$

Dále definujme diferenciál funkce v bodě x_0 vztahem $f'(x_0)(x - x_0)$.

Příklad 27. Vypočtěte následující limity

1. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x}{1-3x-2x^3}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{8-x^3}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-x}{x^n-1}$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$
6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$
7. $\lim_{x\to 1^-} \ln x \ln(1-x)$
8. $\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x$
9. $\lim_{x\to 0} x^x$
10. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
11. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
12. $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$
13. $\lim_{x\to 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$
14. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$
15. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$
16. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
17. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
18. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Výsledek.

1. $-\frac{2}{3}$
2. 0
3. $\frac{n-1}{n}$
4. 0

5. $\frac{1}{2}$
6. $\frac{1}{3}$
7. 0
8. 0
9. 1
10. $\frac{1}{e}$
11. $\frac{1}{e}$
12. 1
13. 1
14. $\frac{1}{2}$
15. $\frac{1}{2}$
16. $e^{-\frac{1}{6}}$
17. $e^{\frac{1}{3}}$
18. $e^{-\frac{1}{3}}$

Příklad 28. Rozviňte polynom $P(x) = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$ do Taylorova polynomu se středem 2. Své tvrzení ověřte.

Výsledek. $P(x) = -5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$

Příklad 29. Rozviňte funkci $f(x) = 2^x$ do Taylorova polynomu čtvrtého stupně se středem 0.

Výsledek. $2^x \doteq 1 + x\ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2} + \frac{x^3 \ln^3 2}{6} + \frac{x^4 \ln^4 2}{24}$

Příklad 30. Určete přibližnou hodnotu $\ln 3$ s přesností na 6 desetinných míst.

Výsledek. $1{,}098615$

Příklad 31. Určete $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ pomocí Taylorovy řady funkce e^x se středem v 0.

Příklad 32. Určete diferenciál funkcí

1. $f(x) = xe^x$
2. $f(x) = 2^{-\frac{\ln x}{x}}$

Výsledek.

1. $e^x(1+x)$
2. $2^{-\frac{\ln x}{x}} \ln 2 \frac{\ln x - 1}{x^2}$

Příklad 33. Určete přibližnou hodnotu $\operatorname{arctg} 1{,}1$ pomocí diferenciálu.

Výsledek. $0{,}83539$

Cvičení 5: Extrémy funkce, průběh funkce

Teorie: V tomto cvičení nás čekají příklady na průběh funkce. Pokud máme vyšetřit průběh funkce, znamená to, že máme určit:

1. Definiční obor a obor hodnot
2. Paritu a periodicitu funkce
3. Nulové body a znaménka funkce
4. Stacionární body, lokální extrémy a jejich druh
5. Intervaly, na kterých je funkce rostoucí a klesající
6. Inflexní body
7. Intervaly, na kterých je funkce konvexní a konkávní
8. Asymptoty se směrnicí a bez směrnice
9. Jednostranné limity v bodech nespojitosti, limity v nevlastních bodech
10. Načrtnout graf funkce

Příklad 34. Najděte extrémy daných funkcí

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
2. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
3. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$
4. $f(x) = e^x \sin x$

Výsledek.

1. Lokální maximum $f(x) = -2$ v bodě $x = -1$; lokální minimum $f(x) = 2$ v bodě $x = 1$.
2. Lokální maximum $f(x) = 1$ v bodě $x = 1$; lokální minimum $f(x) = -1$ v bodě $x = -1$.
3. Lokální maximum $f(x) = 4e^{-2}$ v bodě $x = e^2$; lokální minimum $f(x) = 1$ v bodě $x = 0$.
4. Lokální maximum v bodech $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; lokální minimum v bodech $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Příklad 35. Vyšetřete průběh funkce

1. $f(x) = \frac{x^2-x}{x+1}$
2. $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$
3. $f(x) = \frac{5(x-2)}{x^2}$
4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$
5. $f(x) = x^3 + \frac{x^4}{4}$
6. $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$
7. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x}$
8. $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$
9. $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$
10. $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$

Cvičení 6: Extrémy funkcí - slovní úlohy

Příklad 36. Z ostrova vzdáleného od břehu jezera 5 km se chceme dostat v nejkratší době do města na břehu jezera. Ve kterém místě ostrova máme s lodí přistát, je-li rychlost lodičky 4 km/h a rychlost chodce 6 km/h.

Výsledek. Místo k přistání je vzdálené $2\sqrt{5}$ od paty kolmice vedené ostrovem k břehu jezera.

Příklad 37. Do koule o poloměru r vepište válec s co možná největším objemem. Určete poloměr ρ tohoto válce.

Výsledek. $\rho = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

Příklad 38. Součet dvou kladných reálných čísel je a. Určete

1. Minimální hodnotu součtu jejich n-tých mocnin.
2. Maximální hodnotu součinu jejich n-tých mocnin.

Výsledek.

1. Součet bude minimální, budou-li obě čísla stejná.
2. Maximální součin bude $\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}$

Příklad 39. Drát délky a máme rozdělit na dvě části. Z první části chceme vyrobit čtverec, ze druhé kruh tak, aby součet ploch obou útvarů byl co možná nejmenší. Určete tento součet obsahů.

Výsledek. $S_{min} = \frac{a^2}{4(\pi+4)}$

Příklad 40. Kužel má vrchol ve středu kulové plochy s poloměrem r a podstavná kružnice leží na povrchu koule. Určete, jaký největší objem může mít tento kužel.

Výsledek. $V_{max} = \frac{2\pi r^3\sqrt{3}}{27}$

Příklad 41. Dva splavné, na sebe kolmé kanály, jsou široké 4 m a 6 m. Jak nejvýše dlouhou kládu můžeme kanály splavit?

Výsledek. $\sqrt{\left(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{36}\right)^3}$

Příklad 42. Ze všech obdélníků, které mají obsah S, určete ten s nejmenším obvodem.

Výsledek. Čtverec o straně $\sqrt{S}$.

Příklad 43. Pro jaký poloměr a výšku bude mít válec s daným objemem V nejmenší povrch.

Výsledek. Výška nádoby musí být rovna průměru podstavy válce.

Příklad 44. Do polokoule o poloměru r vepište pravidelný čtyřboký hranol s co možná největším objemem.

Výsledek. Rozměry kvádru jsou $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

Příklad 45. Dané kouli opište kužel s co možná nejmenším objemem.

Výsledek. Objem kužele je roven dvojnásobku objemu koule.

Příklad 46. Určete vzdálenost bodu $[1, 1]$ od paraboly $y^2 = 2x$.

Výsledek. $(\sqrt[3]{2} - 1)\sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{2}}{2}}$

Příklad 47. Určete vzdálenost bodu $[2, 0]$ od kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

Výsledek. 1

Příklad 48. Účastníte se plavecko-běžeckého závodu. Start je na rovné písčité pláži. Cíl ve vodě. Do cíle můžete běžet rovně po pláži 4 km a pak plavat 1 km kolmo k pláži. Běžíte rychlostí 6 km/h a plavete rychlostí 2 km/h. V jakém místě je nejvýhodnější začít plavat?

Výsledek. $4 - \frac{1}{\sqrt{8}}$ od startu.

Cvičení 7: Neurčité integrály

Teorie: V tomto a dalším cvičení se podíváme na neurčité integrály. O funkci $F(x)$ řekneme, že je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ (nebo též, že je neurčitým integrálem funkce f), jestliže $F'(x) = f(x)$.

K integraci funkcí se využívá několik metod. Buď můžeme funkci upravit tak, abychom dostali integrál z nějaké pro nás známé funkce. Další metodou je substituce, kdy vhodně nahradíme novou proměnnou. Pro součin funkcí je pak vhodná metoda per partes.

Příklad 49. Odvoďte a dokažte metodu per-partes.

Příklad 50. Vypočítejte následující integrály

1. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \, dx$
2. $\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} \, dx$
3. $\int \frac{x^2}{1-x^2} \, dx$
4. $\int \frac{x^4+2+x^{-4}}{x^3} \, dx$
5. $\int (\tan x + \cot x) \, dx$
6. $\int \tan^2 x \, dx$
7. $\int \frac{1}{2+3x^2} \, dx$
8. $\int \frac{1}{x^2-x-2} \, dx$
9. $\int \frac{1+x}{1-x} \, dx$

Výsledek.

1. $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + c$
2. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c$
3. $-x + \frac{1}{2}\ln\frac{|1+x|}{|1-x|} + c$
4. $\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + c$
5. $\ln|\tan x| + c$
6. $\tan x - x + c$
7. $\frac{1}{6}\arctan x\sqrt{\frac{3}{2}} + c$
8. $\frac{1}{3}\ln\frac{x-2}{x+1} + c$
9. $-x - 2\ln|1-x| + c$

Příklad 51. Vypočítejte následující integrály

1. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$
2. $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$
3. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \, dx$
4. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} \, dx$
5. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \, dx$
6. $\int xe^{-x^2} \, dx$
7. $\int \frac{e^x}{2+e^x} \, dx$
8. $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$
9. $\int \tan x \, dx$
10. $\int \frac{6}{5x+2x^5} \, dx$
11. $\int \frac{1}{x(5-7x^6)} \, dx$
12. $\int \frac{x}{16-x^4} \, dx$

13. $\int a^x\sqrt{1+a^x}\ dx$

14. $\int \frac{1}{x\ln x^2}\ dx$

Výsledek.

1. $-\sqrt{1-x^2}+c$
2. $-\frac{1}{2(1+x^2)}+c$
3. $2\arctan\sqrt{x}+c$
4. $\cos\frac{1}{x}+c$
5. $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+c$
6. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$
7. $\ln\left(2+e^x\right)+c$
8. $\frac{1}{3}\ln^3 x$
9. $-\ln|\cos x|+c$
10. $\frac{3}{10}\ln\left(\frac{x^4}{5+2x^4}\right)+c$
11. $\frac{1}{30}\ln\left|\frac{x^6}{5-7x^6}\right|+c$
12. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+4}{x^2-4}\right|+c$
13. $\frac{2}{3\ln a}(1+a^x)\sqrt{1+a^x}$
14. $\frac{1}{2}\ln\left(\ln x^2\right)+c$

Cvičení 8: Neurčité integrály

Příklad 52. Vypočítejte následující integrály

1. $\int xe^{2x}\ dx$
2. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\ dx$
3. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\ dx$
4. $\int x^2e^{-2x}\ dx$
5. $\int xe^{-x}\ dx$
6. $\int x^2\sin 2x\ dx$
7. $\int \arctan x\ dx$
8. $\int \arctan sqrtx\ dx$
9. $\int \sin x \ln(\tan x)\ dx$
10. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\ dx$
11. $\int e^{\sqrt{x}}\ dx$
12. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\ dx$

Výsledek.

1. $\frac{e^{2x}(2x-1)}{4} + c$
2. $\frac{e^x}{1+x} + c$
3. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + c$
4. $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + c$
5. $-(x+1)e^{-x} + c$
6. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + c$
7. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$
8. $-\sqrt{x} + (1+x)\arctan\sqrt{x}$
9. $\ln|\tan\frac{x}{2}| - \cos x \ln\tan x$
10. $x\tan x + \ln|\cos x| + c$
11. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$
12. $-(x + \cot x \cdot \ln(e\sin x))$

Příklad 53. Vypočítejte následující integrály

1. $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\ dx$
2. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\ dx$
3. $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\ dx$
4. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\ dx$
5. $\int \frac{x}{x^3-1}\ dx$
6. $\int \frac{1}{x^4-1}\ dx$
7. $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\ dx$
8. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\ dx$
9. $\int \frac{\sin^x}{1+\sin^2 x}\ dx$
10. $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\ dx$
11. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\ dx$

Výsledek.

1. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right| + c$

2. $x + \frac{1}{3}\arctan x - \frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2} + c$

3. $-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + c$

4. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c$

5. $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2x}{\sqrt{3}} + c$

6. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + c$

7. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + c$

8. $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\arctan 2}{2}\right)\right|$

9. $x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + c$

10. $-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}$

11. $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$

Cvičení 9: Určité a nevlastní integrály

Teorie: Důležitým tvrzením pro výpočet určitých integrálů je tkz. Newton-Leibnitzova formule, která nám říká, že pokud je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $F(x)$ je k ní na $\langle a, b\rangle$ primitivní, pak platí

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Počítáme-li nevlastní integrál, potom ho převádíme na vhodnou limitu integrálu vlastního.

Pro přibližné určení určitého integrálu můžeme využít několik obdélníkové, lichoběžníkové či Simpsonovo pravidlo.

Příklad 54. Vypočtěte následující určité integrály

1. $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\ dx$
2. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\ dx$
3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$
4. $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\ dx$
5. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\ dx$
6. $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x\ dx$
7. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\ dx$
8. $\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\ dx$
9. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\ dx$
10. $\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\ dx$, (subst. $x - \frac{1}{x} = t$)
11. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\ dx$

Výsledek.

1. $11\frac{1}{4}$
2. $\frac{\pi}{6}$
3. $\frac{\pi}{3}$
4. $200\sqrt{2}$
5. $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$
6. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\frac{1}{6}$
8. $\frac{\pi a^4}{16}$
9. $2 - \frac{\pi}{2}$
10. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
11. $\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Příklad 55. Vypočítejte následující nevlastní integrály

1. $\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\, dx,\ a > 0$
2. $\int_0^1 \ln x\, dx$
3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx$
4. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
5. $\int_2^\infty \frac{2}{x^2+x-2}\, dx$

Výsledek.

1. $\frac{1}{a}$
2. -1
3. π
4. π
5. $\frac{2}{3}\ln 2$

Příklad 56. Pomocí lichoběžníkového pravidla vypočtěte přibližně následující integrály

1. $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx,\ (n = 8)$
2. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\, dx,\ (n = 12)$

Výsledek.

1. $0,69315$
2. $0,83566$

Příklad 57. Pomocí Simpsonova pravidla vypočtěte přibližně následující integrály

1. $\int_1^9 \sqrt{x}\, dx,\ (n = 4)$
2. $\int_0^\pi \sqrt{3 + \cos x}\, dx,\ (n = 6)$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx,\ (n = 10)$

Výsledek.

1. $17,333$
2. $5,4024$
3. $1,37039$

Cvičení 10: Aplikace integrálního počtu

Příklad 58. Odvoďte parametrické souřadnice

1. Přímky AB, kde $A[-1,2]$, $B[3,1]$
2. Úsečky AB, kde $A[-1,2]$, $B[3,1]$
3. Kružnice se středem v počátku a poloměrem r
4. Funkce $f(x)$
5. Přímky $x = 2$
6. Křivky, kterou vytvoří bod na kružnici o poloměru r, která se vně kotálí po jiné kružnici o poloměru R.

Příklad 59. Vypočtěte obsahy následujících rovinných ploch vymezených křivkami

1. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.
2. $y = x$, $x + \sin^2 x$
3. $y = x^2$, $x + y = 2$
4. $y = |\log x|$, $y = 0$, $x = 0,1$, $x = 10$
5. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$

Výsledek.

1. $4\frac{1}{2}$
2. $\frac{\pi}{2}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $9,9 - 8,1 \log e$
5. $2 - \frac{1}{\ln 2}$

Příklad 60. V jakém poměru dělí parabola $y^2 = x$ plochu vymezenou kružnicí $x^2+y^2 = 8$.

Výsledek. $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$

Příklad 61. Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkami zadanými parametricky

1. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ a $y = 0$
2. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$

Výsledek.

1. $3\pi a^2$
2. $\frac{8}{15}$

Příklad 62. Vypočtěte délku křivky

1. $y = x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$
2. $y = e^x$, $0 \leq x \leq x_0$
3. $y = \ln\cos x$, $0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$
4. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \leq y \leq e$

Výsledek.

1. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$
2. $x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$
3. $\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$
4. $\frac{e^2+1}{4}$

Příklad 63. Vypočtěte objemy těles ohraničených plochami, které vzniknou rotací následujících křivek

1. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$, $0 \leq x \leq a$, rotujeme kolem osy x
2. $y = 2x - x^2$, $y = 0$
   (a) kolem osy x
   (b) kolem osy y
3. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $0 \leq x < \infty$
   (a) rotujeme kolem osy x
   (b) rotujeme kolem osy y
4. $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}$, $0 \leq x < \infty$, rotujeme kolem osy x
5. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
   (a) rotujeme kolem osy x
   (b) rotujeme kolem osy y

Výsledek.

1. $\frac{3}{7}\pi ab^2$
2. $\frac{16\pi}{15}$, $\frac{8\pi}{3}$
3. $\frac{\pi}{2}$, 2π
4. $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$
5. $5\pi^2 a^3$, $6\pi^3 a^3$

Příklad 64. Vypočtěte povrchy ploch vzniklých rotací následujících křivek

1. $y = \tan x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, rotujeme kolem osy x
2. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$, $0 \leq x \leq a$, rotujeme kolem osy x

Výsledek.

1. $\pi\left((\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right)$
2. $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13} + 2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$

Cvičení 11: Nekonečné řady, geometrická řada, řady s nezápornými členy

Příklad 65. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konvergují dané někonečné řady. Určete součet příslušné nekonečné řady.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-2x)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2+7)^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(x+4)^2-3n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{-2i}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(2\log x+3)^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin^n x$

Výsledek.

1. $x \in (0,1)$
2. vždy diverguje
3. $\mathbb{R} \setminus \langle -5,-3\rangle$
4. $\mathbb{R} \setminus \langle -1,1\rangle$
5. $(0,01; 0,1)$
6. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{5}{6}+k\pi; \frac{5}{6}+k\pi)$

Příklad 66. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$

1. $1+3x+9x^2+\cdots=10$
2. $2-4x+8x^2-\cdots=1$
3. $1+\log x+(1+\log x)^2+(1+\log x)^3+\cdots=-6\log x$
4. $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\cdots=-\frac{1}{3}$
5. $\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+\cdots=2$
6. $1-\tan x+\tan^x-\tan^3 x+\cdots=\frac{\tan 2x}{1+\tan 2x}$

Příklad 67. Určete součet dané nekonečné řády

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^{2n-1}}+\frac{2}{4^{2n}}\right)$

Příklad 68. Rozhodněte o konvergenci či divergenci následujících řad

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\arctan n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$

Příklad 69. Vyšetřete konvergenci, resp. divergenci následujících řad

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Příklad 70. Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Příklad 71. Rozhodněte o konvergenci řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2^n}$

Cvičení 12: Nekonečné řady s nezápornými členy, alternující řady, mocninné řady

Příklad 72. Rozhodněte o konvergenci násleudjících řad. Využijte k tomu podílové, odmocninové či integrální kritérium.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n-1)!}{n^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3}{\left(5+\frac{2}{n}\right)^n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$

Příklad 73. Rozhodněte o konvergenci (absolutní konvergenci) následujících alternujících řad.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n^2}}{n!}$

Příklad 74. Určete poloměr a obor konvergence následujících mocninných řad.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n!}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$
7. $(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

Cvičení 13: Mocninné řady

Příklad 75. Určete součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ a pomocí této řady určete součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

Příklad 76. Určete součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ a pomocí této řady určete součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Příklad 77. Vyjádřete funkci $\ln(1+x)$ jako mocninnou řadu a určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

Příklad 78. Určete poloměr konvergence a součet následujících řad

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Příklad 79. Pomocí mocninných řad určete součet řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

Příklad 80. S využitím Taylorovy řady pro e^x určete součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

Příklad 81. Pomocí prvních n členů určete přibližnou hodnotu

1. $\sqrt{e}$, $n = 5$
2. $1,1^{1,2}$, $n = 3$
3. $\cos 18°$ tak, abyste se dopustili chyby nejvýše 10^{-4}