Matematika III – 1. přednáška
Funkce více proměnných: křivky, směrové derivace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

22. 9. 2010

Obsah přednášky

Plán přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Plán přednášky

1. Literatura
2. Zobrazení a funkce více proměnných
   - Funkce více proměnných
   - Topologie euklidovských prostorů
   - Křivky v euklidovských prostorech
   - Zobrazení
3. Limita a spojitost funkce
4. Parciální a směrové derivace
   - Parciální derivace
   - Směrové derivace

V diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se (jak už název napovídá) zabývali zobrazeními

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak příslušné pojmy zobecnit pro případ zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Začneme dvěma speciálními případy:

- n=1 – funkce více proměnných
- m=1 – křivka v prostoru $\mathbb{R}^n$

Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme $x_1, \dots, x_n$). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z. To znamená, že funkce f definované v „prostoru“ $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce f definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme $x_1, \dots, x_n$). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z. To znamená, že funkce f definované v „prostoru“ $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce f definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována. (Častým úkolem - nejen - v písemkách bývá nalézt k dané formuli pro funkci co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definiční obor funkce

Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Definiční obor funkce

Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Řešení

Funkce arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1, 1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů (x, y) vyznačená na obrázku.

Definiční obor funkce

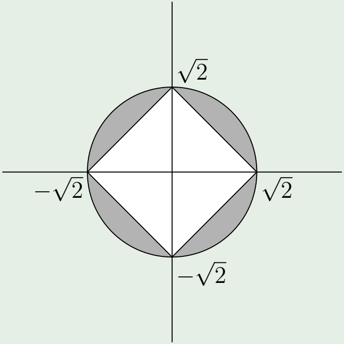
Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-1) + \sqrt{|x|+|y|-\sqrt{2}}.$$

Řešení

Funkce arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1,1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů (x,y) vyznačená na obrázku.



Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n));\ (x_1, \ldots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor funkce f.

Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n));\ (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

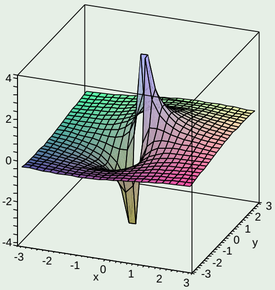
kde A je definiční obor funkce f.

Příklad

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku, maximálním definičním oborem je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{(x, y) \in R^2 : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c*.

Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{(x, y) \in R^2 : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c*.

Zřejmě jde v případě vrstevnice na úrovni c o přímou analogii řezu grafu funkce f rovinou $z = c$. Pro představu o grafu funkce dvou proměnných jsou samozřejmě užitečné rovněž řezy rovinami $x = 0$ (*bokorys*), $y = 0$ (*nárys*), $z = 0$ (*půdorys*).

Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.
Navíc je na $\mathbb{R}^n$ definován standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.

Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.
Navíc je na $\mathbb{R}^n$ definován standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.
Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|Q - P\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|Q - P\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q. Např. v E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_2 - P_1\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.
Navíc je na $\mathbb{R}^n$ definován standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.
Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|Q - P\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|Q - P\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q. Např. v E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_2 - P_1\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.
Trojúhelníková nerovnost pro každé tři body P, Q, R

$$\|R - P\| = \|(Q - P) + (R - Q)\| \le \|(Q - P)\| + \|(R - Q)\|.$$

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského prostoru E_n:

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského prostoru E_n:

Definice

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$) ,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského prostoru E_n:

Definice

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$) ,
- *konvergentní posloupnost* – $\|P_i - P\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského prostoru E_n:

Definice

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$) ,
- *konvergentní posloupnost* – $\|P_i - P\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,
- *hromadný bod P množiny $A \subset E_n$* – existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P, *izolovaný bod P* množiny A – existuje okolí bodu P neobsahující žádné další body z A (rovněž *hromadný bod posloupnosti*).

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod P množiny A* – každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,

Pozn: pozor na kvantifikátory!

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod P množiny A* – každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* – existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,

Pozn: pozor na kvantifikátory!

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod P množiny A* – každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* – existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,
- *ohraničená množina* – leží celá v nějakém δ–okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),

Pozn: pozor na kvantifikátory!

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod P množiny A* – každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* – existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,
- *ohraničená množina* – leží celá v nějakém δ–okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),
- *kompaktní množina* – uzavřená a ohraničená množina.

Pozn: pozor na kvantifikátory!

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
4. *A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
4. *A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*
5. *A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné podpokrytí,*

Věta

1. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřené, je otevřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

Věta

1. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřené, je otevřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.
2. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *uzavřené, je uzavřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

Věta

1. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřené, je otevřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.
2. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *uzavřené, je uzavřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.
3. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompaktní, je kompaktní i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových" křivek.

Definice

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových“ křivek.

Definice

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Je třeba rozlišovat křivku a její obraz v E_n:

Příklad

Obrazem křivky $t \mapsto (\cos(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}$ v rovině E_2 je jednotková kružnice, stejně jako v případě **jiné** křivky $t \mapsto (\cos(t^3), \sin(t^3)), t \in \mathbb{R}$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné lze definovat:

Definice

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné lze definovat:

Definice

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{(c(t) - c(t_0))}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné lze definovat:

Definice

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{(c(t) - c(t_0))}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál:* $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce (= antiderivace) pro křivky:

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce (= antiderivace) pro křivky:

Věta

Je-li $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *křivka spojitá na intervalu* $[a, b]$, *pak existuje její Riemannův integrál* $\int_a^b c(t)dt$. *Navíc je křivka*

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ *pro všechny hodnoty* $t \in [a, b]$.

Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:

Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:
Věta o střední hodnotě dává pro křivku $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ existenci čísel t_i takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c_i'(t_i).$$

Tato čísla ale budou obecně různá, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:
Věta o střední hodnotě dává pro křivku $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ existenci čísel t_i takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c_i'(t_i).$$

Tato čísla ale budou obecně různá, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

Např. v rovině E_2 pro $c(t) = (x(t), y(t))$ takto dostáváme

$$c(b) - c(a) = (x'(\xi)(b - a), y'(\eta)(b - a)) = (b - a) \cdot (x'(\xi), y'(\eta))$$

pro dvě (obecně různé) hodnoty $\xi, \eta \in [a, b]$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T: \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T: \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.

V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T: \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.

V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.

$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T : \; c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.

V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2), t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.

$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,

$c'(0) = (0, 1, 0)$, $\|c'(0)\| = 1$, $c''(0) = (-1, 0, 2)$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T : \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.
V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

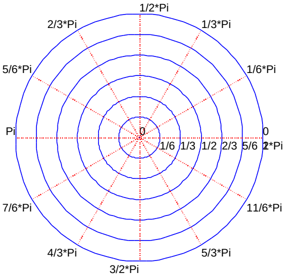
Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.
$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,
$c'(0) = (0, 1, 0)$, $\|c'(0)\| = 1$, $c''(0) = (-1, 0, 2)$.
Zrychlení ve směru tečny je pak $\frac{1}{\|c'(0)\|}(c'(0) \cdot c''(0))$.

Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \to E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc“, může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic – invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

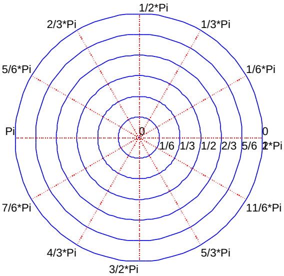
Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \to E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc“, může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic – invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x.



Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \to E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc“, může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic – invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x.

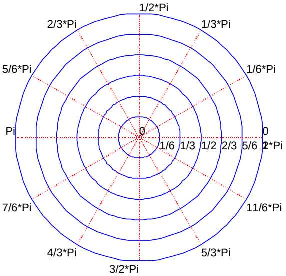


Přechod z polárních souřadnic do standardních je

$$P_{\text{polární}} = (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = P_{\text{kartézské}}$$

Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \to E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc", může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic – invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x.



Přechod z polárních souřadnic do standardních je

$$P_{\text{polární}} = (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = P_{\text{kartézské}}$$

Graf funkce můžeme také vnímat jako obraz zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Funkce jedné proměnné v polárních souřadnicích

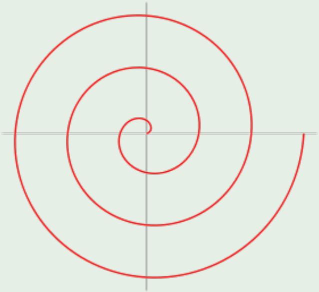
Jak už jsme podotkli, kartézské souřadnice jsou nejběžnější, ale nikoliv jediné možné. Mnohé „objekty“ mají např. v polárních souřadnicích výrazně jednodušší vyjádření (toho využijeme i později zejména pro výpočty obsahů či objemů takových objektů).

Funkce jedné proměnné v polárních souřadnicích

Jak už jsme podotkli, kartézské souřadnice jsou nejběžnější, ale nikoliv jediné možné. Mnohé „objekty“ mají např. v polárních souřadnicích výrazně jednodušší vyjádření (toho využijeme i později zejména pro výpočty obsahů či objemů takových objektů).

Příklad

Archimedova spirála má v polárních souřadnicích rovnici $r(\varphi) = a + b\varphi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry.



Plán přednášky

Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v „nevlastních" bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již 2^n).

Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v „nevlastních“ bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již 2^n).
Má-li mít funkce v daném bodě limitu, nesmí záležet na „cestě“, po které k danému bodu konvergujeme (analogie limit zleva a zprava u funkcí jedné proměnné).

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*

---

[a]někdy také *o dvou policajtech :)*

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a],

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a]*,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x \to a} (c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) + d \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a]*,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x \to a} (c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) + d \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*

---

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a]*,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)+d\cdot g(x)) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x) + d\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*
- *je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a funkce* $g(x)$ *je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu* x*, pak*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0,0)$.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0,0)$.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bodě $(0,0)$.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0,0)$.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bodě $(0,0)$.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0,0)$.

Spojitost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Spojitost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Věta (Weierstrassova)

Spojitá funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.

Spojitost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Věta (Weierstrassova)

Spojitá funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené **souvislé** *množině A. Jsou-li $a, b \in A$ takové, že $f(a) < 0 < f(b)$, pak existuje $c \in A$ tak, že $f(c) = 0$.*

Plán přednášky

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \ldots, x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$).

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$).

Podobně jako v případě jedné proměnné, pokud má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké otevřené množiny, jsou tyto derivace rovněž funkcemi z E_n do $\mathbb{R}$.

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)\right) = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)\right) = \\
&= \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.
\end{aligned}
$$

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)\right) = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)\right) = \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.
\end{aligned}$$

Poznámka

Parciální derivace funkce $f : E_2 \to \mathbb{R}$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$ udává směrnici tečny v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ ke křivce (přesněji: ke grafu křivky), která je průsečíkem grafu G_f s rovinou $y = y_0$.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Příklad

Funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \textit{pro } \text{x=0 } \textit{nebo } \text{y=0}\\ 0 & \textit{jinak}\end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ obě parciální derivace nulové, přitom v tomto bodě neexistuje limita, a tedy není ani spojitá.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

Speciální volbou jednotkových vektorů ve směru souřadných os dostáváme právě *parciální derivace funkce* f.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Poznámka

Neplatí ale aditivita vzhledem ke směrům:
$d_{u+v} f(x) \neq d_u f(x) + d_v f(x)$.
Rovněž je vidět z výše uvedené věty, že směrová derivace nezávisí jen na „směru“ vektoru, ale i na jeho velikosti.

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0)=0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách“ dostáváme různé limity).

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách“ dostáváme různé limity).

Již v případě limit jsme viděli, že nestačí zkoumat chování funkce ve směru souřadných os (parciální derivace), ani po přímkách (směrové derivace), proto by nás uvedené chování nemělo překvapit.