Matematika III – 5. přednáška
Globální (absolutní) extrémy, vázané extrémy, optimalizační metody, lineární programování

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

20. 10. 2010

Obsah přednášky

Plán přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- Ján Plesník, Jitka Dupačová, Milan Vlach, Lineárne programovanie, Alfa, 1990.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- Ján Plesník, Jitka Dupačová, Milan Vlach, Lineárne programovanie, Alfa, 1990.
- Boris Pavlovič Děmidovič, Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- Ján Plesník, Jitka Dupačová, Milan Vlach, Lineárne programovanie, Alfa, 1990.
- Boris Pavlovič Děmidovič, Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003.
- *Předmětové záložky v IS MU*

Plán přednášky

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f.
V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f.
V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

Věta

Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f. V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

Věta

Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Hledání absolutních extrémů funkce na množině tak máme převedeno na nalezení lokálních extrémů (což umíme – vyšetříme stacionární body a body v nichž funkce není diferencovatelná) a vyšetření hraničních bodů.

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je ohraničena trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je ohraničena trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

Řešení

Jediným stacionárním bodem je $[1,1]$, kde nastává absolutní maximum $f(1,1) = 1$. Absolutní minimum -12 nastává v hraničních bodech $[4,0]$ a $[0,4]$.

Vázané extrémy

Již dříve jsme se zabývali úlohou nalézt absolutní extrém dané funkce na (uzavřené) množině, což vedlo na vyšetření lokálních extrémů funkce na hranici této množiny. Jinými slovy, na hledání extrémů funkce v bodech, které jsou *vázány* nějakou další podmínkou.

Vázané extrémy

Již dříve jsme se zabývali úlohou nalézt absolutní extrém dané funkce na (uzavřené) množině, což vedlo na vyšetření lokálních extrémů funkce na hranici této množiny. Jinými slovy, na hledání extrémů funkce v bodech, které jsou *vázány* nějakou další podmínkou.

Ukážeme nejprve názorně graficky na případu funkcí dvou proměnných obecnou metodu.

Příklad

Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 y$ na množině M dané implicitně rovnicí $5x^2 + 2y^2 = 14$.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů

V předchozím příkladu jsme viděli, že normálový vektor (tj. gradient) funkce h, k níž hledáme extrém, musí být ve vyšetřovaném bodě prvkem normálového prostoru k ploše (v témže bodě). Toto samozřejmě platí i obecně.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů

V předchozím příkladu jsme viděli, že normálový vektor (tj. gradient) funkce h, k níž hledáme extrém, musí být ve vyšetřovaném bodě prvkem normálového prostoru k ploše (v témže bodě). Toto samozřejmě platí i obecně.
Pokud je M ve všech svých bodech grafem hladkého zobrazení, musí být každý extrém $P \in M$ stacionárním bodem, tj. pro každou křivku $c(t) \subset M$ procházející přes $P = c(0)$ musí být $h(c(t))$ extrémem pro tuto funkci jedné proměnné. Proto musí platit

$$\frac{d}{dt} h(c(t))_{|t=0} = \mathrm{d}_{c'(0)} h(P) = \mathrm{d}h(P)(c'(0)) = 0.$$

Metoda Lagrangeových multiplikátorů

V předchozím příkladu jsme viděli, že normálový vektor (tj. gradient) funkce h, k níž hledáme extrém, musí být ve vyšetřovaném bodě prvkem normálového prostoru k ploše (v témže bodě). Toto samozřejmě platí i obecně.
Pokud je M ve všech svých bodech grafem hladkého zobrazení, musí být každý extrém $P \in M$ stacionárním bodem, tj. pro každou křivku $c(t) \subset M$ procházející přes $P = c(0)$ musí být $h(c(t))$ extrémem pro tuto funkci jedné proměnné. Proto musí platit

$$\frac{d}{dt} h(c(t))_{|t=0} = \mathrm{d}_{c'(0)} h(P) = \mathrm{d}h(P)(c'(0)) = 0.$$

Tato vlastnost je ekvivalentní tvrzení, že gradient h leží v normálovém podprostoru (přesněji v jeho zaměření). Takové body $P \in M$ budeme nazývat **stacionární body** funkce h vzhledem k vazbám F.

V praxi mívají optimalizační úlohy často $m+n$ parametrů, které jsou vázány n podmínkami. V našem jazyce diferenciálního počtu tedy hledáme extrémy spojitě diferencovatelné funkce h na množině bodů M zadaných implicitně rovnicí $F(x_1, \ldots, x_{m+n}) = \mathbf{0}$ ($F : E_{m+n} \to E_n$).

Normálový prostor k naší množině M je generován řádky Jacobiho matice zobrazení F a stacionární body jsou proto ekvivalentně určeny následujícím tvrzením, kterému se říká **metoda Lagrangeových multiplikátorů**:

V praxi mívají optimalizační úlohy často $m+n$ parametrů, které jsou vázány n podmínkami. V našem jazyce diferenciálního počtu tedy hledáme extrémy spojitě diferencovatelné funkce h na množině bodů M zadaných implicitně rovnicí $F(x_1, \dots, x_{m+n}) = \mathbf{0}$ ($F : E_{m+n} \to E_n$).
Normálový prostor k naší množině M je generován řádky Jacobiho matice zobrazení F a stacionární body jsou proto ekvivalentně určeny následujícím tvrzením, kterému se říká **metoda Lagrangeových multiplikátorů**:

Věta

Nechť $F = (f_1, \dots, f_n) : E_{m+n} \to E_n$ je spojitě diferencovatelná v okolí bodu P, $F(P) = 0$ a M je zadána implicitně rovnicí $F(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0$, přičemž hodnost matice D^1F v bodě P je n. Pak P je stacionárním bodem spojitě diferencovatelné funkce $h : E_{m+n} \to \mathbb{R}$ právě, když existují reálné parametry $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ takové, že

$$\operatorname{grad} h = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \dots + \lambda_n \operatorname{grad} f_n.$$

Všimněme si počtu neznámých a rovnic v tomto algoritmu: gradienty jsou vektory o $m+n$ souřadnicích, tedy požadavek z věty dává $m+n$ rovnic. Jako neznámé máme jednak souřadnice $x_1, \dots, x_{m+n}$ hledaných stacionárních bodů P, ale navíc také n parametrů λ_i v hledané lineární kombinaci. Zbývá však požadavek, že hledaný bod P patří implicitně zadané množině M, což představuje dalších n rovnic. Celkem tedy máme $2n+m$ rovnic pro $2n+m$ proměnných a proto lze očekávat, že řešením bude diskrétní množina bodů P (tj. každý z nich bude izolovaným bodem).

Výklad o vázaných extrémech jsme začali tím, že pro nalezení absolutních extrémů funkce na kompaktní množině často potřebujeme vyšetření extrémů na množině bodů vázaných nějakou podmínkou.

Výklad o vázaných extrémech jsme začali tím, že pro nalezení absolutních extrémů funkce na kompaktní množině často potřebujeme vyšetření extrémů na množině bodů vázaných nějakou podmínkou.

Ilustrujme si to na příkladu:

Příklad

Maximalizujte $f(x, y) = 2x + y$ za podmínky $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

Řešení

Množina určená vazební podmínkou je uzavřená a ohraničená, proto zde nabývá jakákoliv spojitá funkce svých extrémů, a to buď ve stacionárních bodech (funkce je zřejmě diferencovatelné na celé vyšetřované množině) nebo na hranici. Snadno se ale přesvědčíme ($\mathrm{d}f(x,y) = (2,1)$), že uvnitř množiny extrémy nejsou. Proto maximalizujeme funkci f za podmínky $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Řešení

Množina určená vazební podmínkou je uzavřená a ohraničená, proto zde nabývá jakákoliv spojitá funkce svých extrémů, a to buď ve stacionárních bodech (funkce je zřejmě diferencovatelné na celé vyšetřované množině) nebo na hranici. Snadno se ale přesvědčíme ($\mathrm{d}f(x,y) = (2,1)$), že uvnitř množiny extrémy nejsou. Proto maximalizujeme funkci f za podmínky $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
Sestrojíme Lagrangeovu funkci
$L(x,y,\lambda) = 2x + y - \lambda(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1)$. Pak dostáváme:

$$0 = L_x = 2 - \lambda\frac{x}{2}$$

$$0 = L_y = 1 - 2\lambda y$$

$$0 = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1.$$

Řešení

Množina určená vazební podmínkou je uzavřená a ohraničená, proto zde nabývá jakákoliv spojitá funkce svých extrémů, a to buď ve stacionárních bodech (funkce je zřejmě diferencovatelné na celé vyšetřované množině) nebo na hranici. Snadno se ale přesvědčíme ($\mathrm{d}f(x,y) = (2,1)$), že uvnitř množiny extrémy nejsou. Proto maximalizujeme funkci f za podmínky $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
Sestrojíme Lagrangeovu funkci
$L(x,y,\lambda) = 2x + y - \lambda(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1)$. Pak dostáváme:

$$
\begin{aligned}
0 &= L_x = 2 - \lambda\frac{x}{2} \\
0 &= L_y = 1 - 2\lambda y \\
0 &= \frac{x^2}{4} + y^2 - 1.
\end{aligned}
$$

Odtud snadno $x = \frac{4}{\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$, a tedy $\lambda = \frac{\sqrt{17}}{2}, x = \frac{8}{\sqrt{17}}, y = \frac{1}{\sqrt{17}}$ (resp. $\lambda = -\frac{\sqrt{17}}{2}, x = -\frac{8}{\sqrt{17}}, y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ pro minimum).

Plán přednášky

Speciální optimalizační metody

Zmiňme se jen ve stručnosti o speciálních optimalizačních technikách, které se v dnešní praxi používají. Zájemce o bližší seznámení s nimi můžeme odkázat na další předměty MU, např.:

- Optimalizace – `PřF: M0160` (jaro)
- Optimalizace – `PV027` (jaro)
- Lineární programování – `PřF: M4110` (jaro)
- Matematické programování – `PřF: M5170` (podzim)

Metoda gradientu

Již dříve jsme zmínili, že funkce nejrychleji roste ve směru gradientu (a nejrychleji klesá ve směru opačném) – proto je přirozené se při hledání maxima vydat z daného bodu ve směru gradientu (analogie *chození do kopce nejprudším svahem*). Otázka je, jak dlouho „jít“ a jak často gradient počítat (podrobněji viz např. `http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent`). Iterace:

$$x_{n+1} = x_n + \gamma_n \operatorname{grad} f(x_n),$$

pro dostatečně malé γ_n, aby $f(x_{n+1}) > f(x_n)$.

Metoda gradientu

Již dříve jsme zmínili, že funkce nejrychleji roste ve směru gradientu (a nejrychleji klesá ve směru opačném) – proto je přirozené se při hledání maxima vydat z daného bodu ve směru gradientu (analogie *chození do kopce nejprudším svahem*). Otázka je, jak dlouho „jít“ a jak často gradient počítat (podrobněji viz např. `http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent`).
Iterace:

$$x_{n+1} = x_n + \gamma_n \operatorname{grad} f(x_n),$$

pro dostatečně malé γ_n, aby $f(x_{n+1}) > f(x_n)$.
Problémy:

- náročný opakovaný výpočet γ,
- velký počet iterací v případě velmi různorodé křivosti v různých směrech; např *Rosenbrockova banánová funkce* – $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$.

Newtonova optimalizační metoda

Newtonova metoda je dobře známý numerický postup pro nalezení kořenů dané reálné funkce f . Známe-li bod x_0 „rozumně“ blízko kořene, zkonstruujeme v bodě $[x_0, f(x_0)]$ tečnu ke grafu funkce f a za bod x_1 zvolíme průsečík tečny s osou x. Tento postup opakujeme. Snadno je vidět, že platí rekurentní vztah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Newtonova optimalizační metoda

Newtonova metoda je dobře známý numerický postup pro nalezení kořenů dané reálné funkce f . Známe-li bod x_0 „rozumně“ blízko kořene, zkonstruujeme v bodě $[x_0, f(x_0)]$ tečnu ke grafu funkce f a za bod x_1 zvolíme průsečík tečny s osou x. Tento postup opakujeme. Snadno je vidět, že platí rekurentní vztah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tento postup např. poskytuje efektivní postup pro výpočet $\sqrt{2}$ (nebo obecněji $\sqrt{d}$) s libovolnou přesností; pokud bychom ale chtěli hledat řešení rovnice $x^{1/3} = 0$, tak snadno vidíme, že metoda diverguje, ať začneme jakkoli blízko 0.

Při hledání extrémů funkcí (i více proměnných) může být Newtona metoda využita pro nalezení stacionárních bodů – v nich musí být derivace nulová, proto jde vlastně o nalezení kořenů derivace iterativním postupem

$$x_{n+1} = x_n - (Hf(x_n))^{-1} \cdot \operatorname{grad} f(x_n).$$

Při hledání extrémů funkcí (i více proměnných) může být Newtona metoda využita pro nalezení stacionárních bodů – v nich musí být derivace nulová, proto jde vlastně o nalezení kořenů derivace iterativním postupem

$$x_{n+1} = x_n - (Hf(x_n))^{-1} \cdot \operatorname{grad} f(x_n).$$

Výpočet inverze Hessiánu je časově náročná operace, proto se často místo toho využívá

- metoda sdružených gradientů pro řešení příslušné soustavy,
- různých tzv. *kvazi*-newtonovských metod, využívajících pouze přibližného Hessiánu (např. BFGS) – viz např. `http://demonstrations.wolfram.com/MinimizingTheRosenbrockFunction/`

Plán přednášky

Lineární programování

Úloha lineárního programování

Pro daná $c \in \mathbb{R}^n$ řeší lineární programování úlohu optimalizovat (tj. maximalizovat nebo minimalizovat) lineární *účelovou funkci*

$$f(x) = c \cdot x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

Lineární programování

Úloha lineárního programování

Pro daná $c \in \mathbb{R}^n$ řeší lineární programování úlohu optimalizovat (tj. maximalizovat nebo minimalizovat) lineární *účelovou funkci*

$$f(x) = c \cdot x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

za daných (lineárních) omezení

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x &\leq b_1 \\ &\dots \\ a_k \cdot x &\leq b_k \\ a_{k+1} \cdot x &= b_{k+1} \\ &\dots \\ a_\ell \cdot x &= b_\ell \end{aligned}$$

Lineární programování

Lze ukázat, že každou (rozumnou) úlohu lineárního programování lze převést na tzv. *kanonický tvar*

$$\text{maximalizovat} \quad f(x) = c \cdot x$$

za podmínek

$$a_1 \cdot x \leq b_1$$
$$\dots$$
$$a_k \cdot x \leq b_k,$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Lineární programování

Lze ukázat, že každou (rozumnou) úlohu lineárního programování lze převést na tzv. *kanonický tvar*

$$\text{maximalizovat} \quad f(x) = c \cdot x$$

za podmínek

$$a_1 \cdot x \leq b_1$$
$$\dots$$
$$a_k \cdot x \leq b_k,$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.
Převody:

- minimalizace $c \cdot x$ $\to$ maximalizace $(-c) \cdot x$
- nerovnice $\leftrightarrow$ rovnice (doplňková proměnná, resp. nahrazení rovnice dvojicí nerovnic)
- reálná proměnná x $\to$ nezáporné proměnné (substituce $x = x^+ - x^-$, $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$).

Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obdobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.

Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obdobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.
V rovině si znázorníme množinu, vyhovující všem omezujícím podmínkám a pomocí vrstevnic účelové funkce najdeme bod(y) této množiny, kde nabývá účelová funkce extrémů.

Grafické řešení úlohy lineárního programování

Úloha lineárního programování má pro 2 proměnné graficky názorný způsob řešení, vycházející z obdobného přístupu jako v případě vázaných extrémů.
V rovině si znázorníme množinu, vyhovující všem omezujícím podmínkám a pomocí vrstevnic účelové funkce najdeme bod(y) této množiny, kde nabývá účelová funkce extrémů.

Příklad

Maximalizujte hodnotu $x + y$ za podmínek

$$\begin{aligned} 4x - y &\leq 8 \\ 2x + y &\leq 10 \\ 5x - 2y &\geq -2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).

Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).
Úvodní fáze spočívá v nalezení nějakého vrcholu na polytopu (zobecnění polyedru, tj. mnohostěnu, na více dimenzí), který je tvořen body vyhovujícími podmínkám. V dalších krocích postupuje po hranách do vrcholů s vyšší hodnotou účelové funkce.

Simplexová metoda

Standardní úlohu řeší klasická Simplexová metoda (George Dantzig, 1947).
Úvodní fáze spočívá v nalezení nějakého vrcholu na polytopu (zobecnění polyedru, tj. mnohostěnu, na více dimenzí), který je tvořen body vyhovujícími podmínkám. V dalších krocích postupuje po hranách do vrcholů s vyšší hodnotou účelové funkce.
Sice je ukázán příklad podmínek, kdy simplexová metoda projde nešikovně všech 2^n vrcholů (jde o příklad zborcené n-rozměrné krychle), a tedy metoda je v nejhorším případě exponenciální, ale v praxi je obvykle pozoruhodně úspěšná (kolem roku 2000 bylo dokázáno, že očekávaný čas běhu na náhodném vstupu je polynomiální).

Příklad

Maximalizujte $f = 2x - 3y + 4z$ za podmínek

$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &\leq 3 \\ x + y + z &\leq 10 \\ 2x + y - z &\leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Řešení

Převedeme úlohu z kanonického do *standardního* tvaru – k tomu stačí zavést doplňkové proměnné u, v, w. Maximalizujeme

$$\begin{array}{cccccc} 4x - 3y & +z + u & & & = 3 \\ x + y & +z & +v & & = 10 \\ 2x + y & -z & & + w & = 10 \\ \hline -2x + 3y & -4z & & & +f = 0 \end{array}$$

Řešení (pokračování)

Úlohu přepíšeme do tzv. *simplexové tabulky*.

	x	y	z	u	v	w	
u	4	-3	1	1	0	0	3
v	1	1	1	0	1	0	10
w	2	1	-1	0	0	1	10
f	-2	3	-4	0	0	0	0

V posledním řádku odpovídajícím účelové funkci najdeme **některou zápornou hodnotu** (*heuristika: největší v abs. hodnotě*), což odpovídá tomu, že se snažíme postupovat po hraně *ve směru* proměnné odpovídající příslušnému sloupci. Krajní vrchol této hrany najdeme tak, že najdeme minimum z podílů $3/1, 10/1$ absolutních členů a **kladných** koeficientů u proměnné, v jejímž směru se snažíme postupovat. Zde půjde o sloupec proměnné z a eliminovat budeme pomocí 1. řádku ("pivot"je 1) – řádek označíme stejně jako dotyčný sloupec (*proměnná přejde do báze*).

Řešení (pokračování)

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x & y & z & u & v & w & \\
z & 4 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
v & -3 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 7 \\
w & 6 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 13 \\
\hline
f & 14 & -9 & 0 & 4 & 0 & 0 & 12
\end{array}
$$

Nyní máme jediný záporný prvek v posledním řádku (sloupec y) a v něm jediný kladný prvek, proto pivotujeme podle 4 ve 2. řádku.

Řešení (dokončení)

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x & y & z & u & v & w & \\
z & \frac{7}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{33}{4} \\
y & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\
w & \frac{9}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{33}{2} \\
\hline
f & \frac{29}{4} & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & 1 & \frac{111}{4}
\end{array}
$$

Nyní již máme všechny prvky v posledním řádku kladné, dosáhli jsme tedy maxima

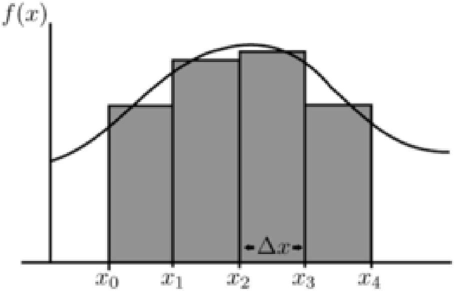
$$f = \frac{111}{4}$$

pro $z = \frac{33}{4}$, $y = \frac{7}{4}$ a $w = \frac{33}{2}$. Původní proměnná x je nyní nebazická (x není uvedeno jako označení žádného řádku nebo ekvivalentně: sloupec x není eliminovaný), což odpovídá $x = 0$.

Plán přednášky

Připomenutí: Riemannův integrál

Motivace: výpočet plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na uzavřeném intervalu.
Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedné proměnné ohraničená na uzavřeném intervalu $[a, b]$).



Zvolíme dělení $D = \{x_1 = a, \dots, x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ a hledaný integrál (tj. *plochu pod grafem*) aproximujeme součtem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

kde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ je libovolný. (Součet ploch obdélníků pod křivkou).

Zvolíme dělení $D = \{x_1 = a, \dots, x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ a hledaný integrál (tj. *plochu pod grafem*) aproximujeme součtem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

kde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ je libovolný. (Součet ploch obdélníků pod křivkou).

Je-li *norma dělení* (tj. maximum z délek intervalů $[x_i, x_{i+1}]$) *malá*, pak výše uvedená suma je velmi blízko zmíněné ploše (přesněji pomocí nulové posloupnosti dělení a limit).

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$,

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$,
- délka křivky zadané parametricky $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$,

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$,
- délka křivky zadané parametricky $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$,
- objem rotačního tělesa $\pi \int_a^b f^2(x)dx$,

Připomenutí: Riemannův integrál

Vlastnosti: Množina Riemannovsky měřitelných funkcí na intervalu $[a, b]$ tvoří vektorový prostor a integrál je na něm lineární formou.

Aplikace:

- plocha ohraničená grafy 2 funkcí $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$,
- délka křivky zadané parametricky $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$,
- objem rotačního tělesa $\pi \int_a^b f^2(x)dx$,
- povrch pláště rotačního tělesa $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

Integrály závislé na parametru

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné x funkci $n+1$ proměnných $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, potom výsledek bude funkcí $F(y_1, \ldots, y_n)$ ve zbývajících n proměnných.

Integrály závislé na parametru

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné x funkci $n+1$ proměnných $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, potom výsledek bude funkcí $F(y_1, \ldots, y_n)$ ve zbývajících n proměnných.

Věta (O záměně derivace a integrálu)

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ definovanou pro x z konečného intervalu $[\alpha, \beta]$ a na nějakém okolí bodu $a = [a_1, \ldots, a_n] \in E_n$ uvažujme integrál

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \int_\alpha^\beta f(x, y_1, \ldots, y_n)dx.$$

Potom platí pro všechny indexy $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, a_1, \ldots, a_n)dx.$$

Integrace funkcí více proměnných

Obdobně jako v případě jedné proměnné můžeme potřebu zavedení integrálu více proměnných motivovat výpočtem objemu trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných.
Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.

Integrace funkcí více proměnných

Obdobně jako v případě jedné proměnné můžeme potřebu zavedení integrálu více proměnných motivovat výpočtem objemu trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných.

Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.

Co jsou obory integrace?

Nejjednodušším přístupem je uvažovat pouze obory integrace S, které jsou dány jako součiny intervalů, tj. jsou zadány rozsahem $x \in [a, b]$ a $y \in [c, d]$.

Hovoříme v této souvislosti o **vícerozměrném intervalu**.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastí $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.

Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastí $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.
Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.
Integrál existuje, jestliže pro každou volbu posloupnosti dělení Ξ (nyní ve všech proměnných zároveň) a reprezentantů jednotlivých krychliček

$$\xi_{i,\dots,j} \in [x_i, x_{i+1}] \times \dots \times [z_j, z_{j+1}] \subset \mathbb{R}^n,$$

s maximální velikostí mezi všemi použitými intervaly jdoucí k nule, budou integrální součty

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i,\dots,j} f(\xi_{i,\dots,j})(x_{i+1} - x_i)\dots(z_{j+1} - z_j).$$

konvergovat k jedné hodnotě, kterou zapisujeme

$$\int_S f(x, \dots, z)dx \dots dz$$

Pro všechny spojité funkce f lze opět dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro „dostatečně spojité“ funkce na „dostatečně rozumných“ oborech integrace.

Pro všechny spojité funkce f lze opět dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro „dostatečně spojité“ funkce na „dostatečně rozumných“ oborech integrace.

Definice

Omezenou množinu $S \subset E_n$ označujeme za **Riemannovsky měřitelnou**, jestliže je její charakteristická funkce, definovaná $\chi(x) = 1$ pro $x \in S$ a $\chi(x) = 0$ jinak, Riemannovsky integrovatelná.

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst (kromě využití výpočetní techniky, kdy je přímé použití definice na místě), okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst (kromě využití výpočetní techniky, kdy je přímé použití definice na místě), okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Věta

Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu $S \subset E_n$ je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.
Pokud je obor integrace S zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů S_i, je integrál funkce f přes S dán součtem integrálů přes obory S_i.

Příklad

Vypočtěte dvojný integrál

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy \, dxdy$$

jako limitu integrálního součtu.

Příklad

Vypočtěte dvojný integrál

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy \, dxdy$$

jako limitu integrálního součtu.

Řešení

Za nulovou posloupnost dělení uvážíme posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$, kde n-té dělení dostaneme pomocí přímek $x = i/n, y = j/n$ pro $i, j = 1, 2, \dots, n-1$, přičemž hodnoty $\xi_{i,j}$ budeme vybírat z pravých horních rohů dělících čtverečků.

Řešení (dokončení)

Pak

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{0\le i,j<n} \frac{(i+1)}{n}\frac{(j+1)}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{1\le i,j\le n} ij =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left(\sum_{1\le i\le n} i\right)\left(\sum_{1\le j\le n} j\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}.$$

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd. (Zejména tedy i případy, kdy jsou funkce $\varphi, \psi, \eta, \zeta$ konstantní.)

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd. (Zejména tedy i případy, kdy jsou funkce $\varphi, \psi, \eta, \zeta$ konstantní.)

Věta

V případě množiny S zadané jako výše a Riemannovsky integrovatelné funkce f na S je Riemannův integrál vyčíslen formulí

$$\int_S f(x, y, \dots, z) dx \dots dz =$$

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \dots \left(\int_{\eta(x,y,\dots)}^{\zeta(x,y,\dots)} f(x, y, \dots, z) dz \right) \dots dy \right) dx$$

Přímým důsledkem pro konstatní funkce je:

Věta

Pro vícerozměrný interval $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ *a spojitou funkci* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *na* S *je násobný integrál*

$$\int_S f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \right) \ldots \right) dx_n$$

nezávislý na pořadí, ve kterém postupně integraci provádíme.

Příklad (nezávislé meze integrace)

Vypočtěte dvojný integrál

$$I = \int_{[0,1]\times[0,3]} 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2\, dxdy.$$

Příklad (nezávislé meze integrace)

Vypočtěte dvojný integrál

$$I = \int_{[0,1]\times[0,3]} 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2\, dxdy.$$

Řešení

S využitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left(\int_0^1 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2\, dx \right) dy = \\ &= \int_0^3 \left[(x-1)^3 + x(y-2)^2 + 2x \right]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^3 (y-2)^2 + 3\, dy = [\tfrac{1}{3}(y-2)^3 + 3y]_0^3 = 12 \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme i při integraci v opačném pořadí.

Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2 \, dxdy,$$

kde S je plocha v 1. kvadrantu E_2 ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2\, dxdy,$$

kde S je plocha v 1. kvadrantu E_2 ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

Řešení

Snadno je vidět, že grafy se protínají v bodech $[0, 0]$ a $[1, 1]$, přičemž pro $x \in [0, 1]$ je $x^2 \leq x$.

Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2 \, dxdy,$$

kde S je plocha v 1. kvadrantu E_2 ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

Řešení

Snadno je vidět, že grafy se protínají v bodech $[0,0]$ a $[1,1]$, přičemž pro $x \in [0,1]$ je $x^2 \leq x$. Proto je

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy^2 \, dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[xy^3 \right]_{y=x^2}^{x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^4 - x^7) \, dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{40}.$$