Matematika III – 1. přednáška
Funkce více proměnných: křivky, směrové derivace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18. 9. 2007

Obsah přednášky

Plán přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Plán přednášky

V diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se (jak už název napovídá) zabývali zobrazeními

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak příslušné pojmy zobecnit pro případ zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Začneme dvěma speciálními případy:

- $n=1$ – funkce více proměnných
- $m=1$ – křivka v prostoru $\mathbb{R}^n$

Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme $x_1, \dots, x_n$). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z. To znamená, že funkce f definované v *prostoru* $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce f definované v *rovině* $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme $x_1, \dots, x_n$). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z. To znamená, že funkce f definované v *prostoru* $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce f definované v *rovině* $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována. (Častým úkolem - nejen - v písemkách bývá nalézt k dané formuli pro funkci co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definiční obor funkce

Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Definiční obor funkce

Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Řešení

Funkce arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1, 1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů (x, y) vyznačená na obrázku.

Definiční obor funkce

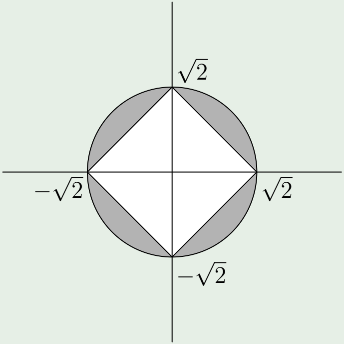
Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Řešení

Funkce arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1,1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů (x,y) vyznačená na obrázku.



Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n));\ (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor funkce f.

Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n));\ (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

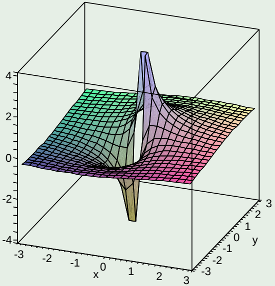
kde A je definiční obor funkce f.

Příklad

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku, maximálním definičním oborem je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = (x, y) \in R^2 : f(x, y) = c$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c*.

Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = (x, y) \in R^2 : f(x, y) = c$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c*.

Zřejmě jde v případě vrstevnice na úrovni c o přímou analogii řezu grafu funkce f rovinou $z = c$. Pro představu o grafu funkce dvou proměnných jsou samozřejmě užitečné rovněž řezy rovinami $x = 0$ (*bokorys*), $y = 0$ (*nárys*), $z = 0$ (*půdorys*).

Příklad

Pomocí vrstevnic a řezů určete graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Příklad

Pomocí vrstevnic a řezů určete graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení

Viz ilustrace v programu Maple.

Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na $\mathbb{R}^n$ definován standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.

Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.
Navíc je na $\mathbb{R}^n$ definován standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.
Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|Q - P\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|Q - P\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q. Např. v E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_2 - P_1\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Topologie euklidovských prostorů

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.
Navíc je na $\mathbb{R}^n$ definován standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.
Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|Q - P\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|Q - P\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q. Např. v E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_2 - P_1\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.
Trojúhelníková nerovnost pro každé tři body P, Q, R

$$\|R - P\| = \|(Q - P) + (R - Q)\| \leq \|(Q - P)\| + \|(R - Q)\|.$$

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n:

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n:

Definice

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$) ,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n:

Definice

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$) ,
- *konvergentní posloupnost* – $\|P_i - P\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n:

Definice

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j (nebo taky $\|P_i - P_j\| < \varepsilon$ pro všechna $i, j > N$ a vhodné $N \in \mathbb{N}$) ,
- *konvergentní posloupnost* – $\|P_i - P\| < \varepsilon$, pro každé pevně zvolené $\varepsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,
- *hromadný bod P množiny $A \subset E_n$* – existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P,

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina
  $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod P množiny A* – každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,

Pozn: pozor na kvantifikátory!

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod P množiny A* – každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* – existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,

Pozn: pozor na kvantifikátory!

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod P množiny A* – každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* – existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,
- *ohraničená množina* – leží celá v nějakém δ–okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),

Pozn: pozor na kvantifikátory!

Definice

- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,
- *hraniční bod P množiny A* – každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* – existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,
- *ohraničená množina* – leží celá v nějakém δ–okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),
- *kompaktní množina* – uzavřená a ohraničená množina.

Pozn: pozor na kvantifikátory!

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
4. *A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*

Věta

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
4. *A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*
5. *A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné podpokrytí,*

Věta

1. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřené, je otevřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

Věta

1. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřené, je otevřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.
2. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *uzavřené, je uzavřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

Věta

1. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřené, je otevřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.
2. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *uzavřené, je uzavřená i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.
3. *Jsou-li* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompaktní, je kompaktní i množina* $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových“ křivek.

Definice

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových“ křivek.

Definice

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Je třeba rozlišovat křivku a její obraz v E_n:

Příklad

Obrazem křivky $t \mapsto (\cos(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}$ v rovině E_2 je jednotková kružnice, stejně jako v případě **jiné** křivky $t \mapsto (\cos(t^3), \sin(t^3)), t \in \mathbb{R}$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definice

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definice

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{(c(t) - c(t_0))}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definice

- *Limita:* $\lim_{t\to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{(c(t)-c(t_0))}{t-t_0} \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál:* $\int_a^b c(t)dt \in \mathbb{R}^n$.

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce (= antiderivace) pro křivky:

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce (= antiderivace) pro křivky:

Věta

Je-li $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.

Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:

Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:
Věta o střední hodnotě dává pro křivku $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ existenci čísel t_i takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c_i'(t_i).$$

Tato čísla ale budou obecně různá, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

Poznámka

Ne vše funguje tak jako u funkcí jedné proměnné:
Věta o střední hodnotě dává pro křivku $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ existenci čísel t_i takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c_i'(t_i).$$

Tato čísla ale budou obecně různá, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

Např. v rovině E_2 pro $c(t) = (x(t), y(t))$ takto dostáváme

$$c(b) - c(a) = (x'(\xi)(b - a), y'(\eta)(b - a)) = (b - a) \cdot (x'(\xi), y'(\eta))$$

pro dvě (obecně různé) hodnoty $\xi, \eta \in [a, b]$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T : \; c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T: \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce c* v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.
V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2), t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T : \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.
V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.
$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T : \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.

V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.

$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,

$c'(0) = (0, 1, 0)$, $\|c'(0)\| = 1$, $c''(0) = (-1, 0, 2)$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T : \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, narozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.
V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete rychlost, velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 0$.
$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,
$c'(0) = (0, 1, 0)$, $\|c'(0)\| = 1$, $c''(0) = (-1, 0, 2)$.
Zrychlení ve směru tečny je pak $\frac{1}{\|c'(0)\|}(c'(0) \cdot c''(0))$.