Matematika III – 2. přednáška
Funkce více proměnných: limita, spojitost, derivace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

22. 9. 2014

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple*, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

V diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se (jak už název napovídá) zabývali zobrazeními

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak příslušné pojmy zobecnit pro případ zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Zabývat se budeme především dvěma speciálními případy:

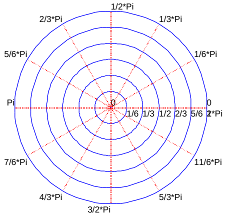
- n=1 – funkce více proměnných
- m=1 – křivka v prostoru $\mathbb{R}^n$

Zobrazení

Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \to E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc“, může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic je invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Příklad

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x.



Přechod z polárních souřadnic do standardních je

$$P_{\text{polární}} = (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = P_{\text{kartézské}}$$

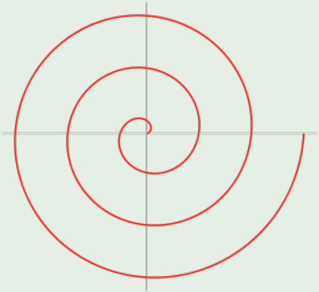
Graf funkce můžeme také vnímat jako obraz zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Funkce jedné proměnné v polárních souřadnicích

Jak už jsme podotkli, kartézské souřadnice jsou nejběžnější, ale nikoliv jediné možné. Mnohé „objekty“ mají např. v polárních souřadnicích výrazně jednodušší vyjádření (toho využijeme i později zejména pro výpočty obsahů či objemů takových objektů).

Příklad

Archimedova spirála má v polárních souřadnicích rovnici $r(\varphi) = a + b\varphi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry.



Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v „nevlastních“ bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již 2^n).
Má-li mít funkce v daném bodě limitu, *nesmí záležet na „cestě“*, po které k danému bodu konvergujeme (analogie limit zleva a zprava u funkcí jedné proměnné).

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a]*,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)+d\cdot g(x)) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x) + d\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*
- *je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a funkce* $g(x)$ *je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu a, pak*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0,0)$.

Řešení

Viz cvičení.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bodě $(0,0)$.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0,0)$.

Příklady k procvičení

Příklad

Vypočtěte limity nebo dokažte jejich neexistenci.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,

c) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.

Spojitost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v bodě a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Věta (Weierstrassova)

Spojitá funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je spojitá na otevřené* **souvislé** *množině* A. *Jsou-li* $a, b \in A$ *takové, že* $f(a) < 0 < f(b)$, *pak existuje* $c \in A$ *tak, že* $f(c) = 0$.

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ *parciální derivaci podle proměnné* x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$).

Podobně jako v případě jedné proměnné, pokud má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké otevřené množiny, jsou tyto derivace rovněž funkcemi z E_n do $\mathbb{R}$.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Příklad

Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } \mathrm{x{=}0} \textit{ nebo } \mathrm{y{=}0} \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0]$ obě parciální derivace nulové, přitom v tomto bodě neexistuje limita, a tedy není ani spojitá.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

Speciální volbou jednotkových vektorů ve směru souřadných os dostáváme právě *parciální derivace funkce f*.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x), d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

1. $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, *pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$,
2. $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
3. $d_v(fg)(x) = d_v f(x)\, g(x) + f(x) d_v g(x)$,
4. *pro* $g(x) \neq 0$ *je* $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(d_v f(x)\, g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Poznámka

Neplatí ale aditivita vzhledem ke směrům:
$d_{u+v} f(x) \neq d_u f(x) + d_v f(x)$.
Rovněž je vidět z výše uvedené věty, že směrová derivace nezávisí jen na „směru“ vektoru, ale i na jeho velikosti.

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0, 0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách" dostáváme různé limity).

Již v případě limit jsme viděli, že nestačí zkoumat chování funkce ve směru souřadných os (parciální derivace), ani po přímkách (směrové derivace), proto by nás uvedené chování nemělo překvapit.
Ke spojitosti potřebujeme silnější pojem, tzv. *totální diferenciál*,

Příklady k procvičení

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[-1, 1]$ ve směru vektoru $(1, 2)$.

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.
Ukázali jste si, že diferenciál závislé proměnné dy je **lineární funkcí** diferenciálu nezávislé proměnné dx, splňující

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Formálně říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v x_0, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

(Přitom z definice derivace snadno plyne, že pak $A = f'(x_0)$.)

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definice

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry" $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v\big) = 0.$$

Lineární funkci *df* definovanou předpisem $v \mapsto a \cdot v$ (závislou na vektorové proměnné v) nazýváme *diferenciál funkce* f.

V literatuře se často také říká *totální diferenciál* df funkce f.

Diferenciál – shrnutí

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je tedy *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

1. v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $v \mapsto d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v
3. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - d_v f(x)\big)$,
   tj. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v\big)$.

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již konečně dostáváme **spojitost:**

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne
$f(x+v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v \to 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.
Proto:

$$\lim_{v \to 0} \big(f(x+v) - f(x)\big) = \lim_{v \to 0} \big(a \cdot v + \tau(v)\big) = 0,$$

a tedy

$$\lim_{v \to 0} f(x+v) = f(x).$$

□

Příklad

Přímo z definice určete df a funkci τ pro $f(x,y) = x^2 + y^2$ v obecném bodě $[x^*, y^*]$.

Řešení

Kvůli přehlednosti označme $h := \mathrm{d}x$, $k := \mathrm{d}y$. Pak

$$\begin{aligned} f(x^* + \mathrm{d}x, y^* + \mathrm{d}y) - f(x^*, y^*) = \\ &= (x^* + h)^2 + (y^* + k)^2 - (x^*)^2 - (y^*)^2 = \\ &= 2x^* h + 2y^* h + h^2 + k^2. \end{aligned}$$

Odtud $\mathrm{d}f(x^*, y^*)(h,k) = 2x^* \cdot h + 2y^* \cdot k$ a $\tau(h,k) = h^2 + k^2$.

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x, pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = \mathrm{d}f(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Důkaz:

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+tv) - f(x)\big) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(\mathrm{d}f(x)(tv) + \tau(tv)\big) =$$
$$= \mathrm{d}f(x)(v) + \|v\| \lim_{t \to 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = \mathrm{d}f(x)(v) = a \cdot v.$$

Poznámka

Z předchozího je ihned vidět, že vektor parciálních derivací $f'(x)$ je přímo roven vektoru a.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $\mathrm{d}f : E_2 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (*)$$

a platí:

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál $\mathrm{d}f$ v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí $(*)$.

Příklady k procvičení

Příklad

Určete diferenciál v daném bodě:

a) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ v bodě $[1,1]$,

b) $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $[1,\sqrt{3}]$.

Příklad

Spočtěme znovu jednodušeji dřívější příklad a určeme směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ v bodě $[-1,1]$ ve směru vektoru $(1,2)$ pomocí diferenciálu.

Přibližné výpočty

Podobně jako v případě diferenciálu funkcí jedné proměnné lze i diferenciál funkce více proměnných využít k (velmi) přibližným výpočtům.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočteme $\mathrm{e}^{0{,}05^3-0{,}02}$.

Řešení

Využijeme diferenciál funkce $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^3+y}$ v bodě $x=[0,0]$ s diferencemi $v=(0{,}05;-0{,}02)$. Máme

$$\mathrm{d}f(x,y)=\mathrm{e}^{x^3+y}\cdot 3x^2\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x^3+y}\,\mathrm{d}y,$$

a tedy $\mathrm{d}f(0,0)=0\,\mathrm{d}x+1\,\mathrm{d}y$, což celkem dává odhad $\mathrm{e}^{0{,}05^3-0{,}02}=f(0{,}05;-0{,}02)\approx f(0,0)+\mathrm{d}f(0{,}05;-0{,}02)=1-0{,}02=0{,}98.$

Příklady k procvičení

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$,

b) $1,04^{2{,}02}$.