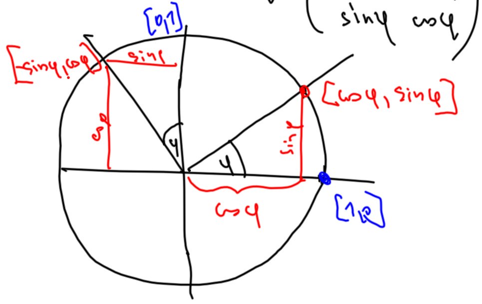
rotace o $\frac{\pi}{2}$:

$(x,y) \mapsto (-y,x)$

matice v bázi $\underline{e}$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

obecně o úhel φ: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



10 29-16:30

ad Př

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "e=u'", "\simeq"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e=u", "\simeq"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "id_W"] \arrow[d, "\simeq", "e"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\simeq", "v'=v"'] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{u,v}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$\{v_1, v_2\}$

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = A_{e,e}$ $\quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$A_{e,v} = S^{-1} \cdot A \cdot E_3$$

10 29-16:41

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_1[x]$ v bázi $(1, x)$

$a_0 + a_1 \cdot x$ má souř. $[a_0, a_1]$

derivace: $a_0 + a_1 \cdot x \mapsto a_1$

$$B \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10 29-16:49

Hledáme a taková, aby:

$a \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$A \cdot x = a \cdot x$$

$$A \cdot x - \underline{a} \cdot x = 0$$

$$A \cdot x - (a \cdot E_n) \cdot x = 0$$

$$\underbrace{(A - \overset{\text{neznámá}}{a}\, E_n)}_{\text{matice } n \times n} \cdot \underset{\mathbb{K}^n}{\underset{\in}{x}} = 0$$

10 29-17:01

$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, vlastní hodnoty?

$$|A - \lambda \cdot E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+3)(\lambda-4) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

chceme taková, aby $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1$

10 29-17:05

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|D - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + 1$$

Nemá vlastní hodnoty v $\mathbb{R}$,

ale $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ jsou vlastní hodnoty v $\mathbb{C}$.

10 29-17:09

$f(a\cdot u) = a\cdot f(u) = a\cdot\lambda\cdot u = \lambda\cdot(a\cdot u)$

lin. zobr. f

u vl. vektor přísl. vl. číslu λ

u vl. vektor $\Rightarrow$ $a\cdot u$ je vl. vektor přísl. témuž λ

u, v vl. vektory $\Rightarrow$ $u+v$ je vl. vektor příslušný λ.

$f(u+v) = f(u)+f(v) = \lambda\cdot u+\lambda\cdot v =$

$= \lambda\cdot(u+v)$

10 29-17:14

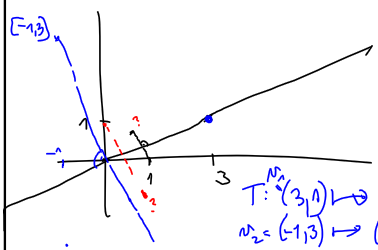
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} a\cdot x + b\cdot y + c \\ \vdots \end{pmatrix}$$

10 29-17:28

Příklad

Určete matici osové souměrnosti v $\mathbb{R}^2$ podle přímky procházející počátkem a bodem $[3,1]$, ve vhodné bázi a určete vlastní čísla a vlastní vektory této transformace.



$T: v_1 = (3,1) \mapsto (3,1)$

$v_2 = (-1,3) \mapsto (1,-3)$

báze v_1, v_2

$A_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Trace T má vl. hodnoty 1 a −1,

vl. vektor příslušný 1 je (3,1)

a −1 je (−1,3)

10 29-17:34