Matematika I – 11a
Afinní geometrie

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

26. 11. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

Vrátíme se teď k úlohám elementární geometrie z podobného pohledu, jako když jsme zkoumali polohy bodů v rovině.

Zjistili jsme, že všechna řešení nehomogenních systémů rovnic sice netvoří vektorové podprostory, vždy ale vznikají tak, že k jednomu jedinému řešení přičteme celý vektorový prostor řešení příslušné homogenní soustavy. Naopak, rozdíl dvou řešení nehomogenní soustavy je vždy řešením homogenní. Obdobně se chovají lineární difereční rovnice.

Ve skutečnosti je podstatné, že k „bodům“ prostoru přičítáme „vektory“.

Definition (Afinní prostory)

Standarní afinní prostor $\mathcal{A}_n$ je množina všech bodů v $\mathbb{R}^n$ spolu s operací, kterou k bodu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ a vektoru $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadíme bod $A + v = (a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$. Tyto operace splňují následující tři vlastnosti:

1. $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in P$ a nulový vektor $0 \in V$
2. $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$, $A \in P$
3. pro každé dva body $A, B \in P$ existuje právě jeden vektor $v \in P$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $B - A$, někdy také $\vec{AB}$.

Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ nazýváme **zaměření afinního prostoru** $\mathcal{A}_n$.

Definition (Afinní prostory)

Standarní afinní prostor $\mathcal{A}_n$ je množina všech bodů v $\mathbb{R}^n$ spolu s operací, kterou k bodu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ a vektoru $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadíme bod $A + v = (a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$. Tyto operace splňují následující tři vlastnosti:

1. $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in P$ a nulový vektor $0 \in V$
2. $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$, $A \in P$
3. pro každé dva body $A, B \in P$ existuje právě jeden vektor $v \in P$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $B - A$, někdy také $\vec{AB}$.

Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ nazýváme **zaměření afinního prostoru** $\mathcal{A}_n$.

Formálních nebezpečí – stejný symbol „+“ pro dvě různé operace: přičtení vektoru ze zaměření k bodu v afinním prostoru, ale také sčítání vektorů v zaměření $\mathbb{R}^n$.

Z definice standardního afinního prostoru okamžitě plyne pro libovolné body A, B, C v afinním prostoru $\mathcal{A}_n$

$$A - A = 0 \in V$$
$$B - A = -(A - B)$$
$$(B - A) + (C - B) = (C - A).$$

Volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}_n$ nám určuje bijekci mezi $V = \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{A}_n$.

Volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}_n$ nám určuje bijekci mezi $V = \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{A}_n$.
Při volbě pevné báze $\underline{u}$ ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Afinní souřadnice

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic** $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ zadané **počátkem afinní souřadné soustavy** A_0 a bazí zaměření $\underline{u}$.
Hovoříme také o **afinním repéru** $(A_0, \underline{u})$.

Volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}_n$ nám určuje bijekci mezi $V = \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{A}_n$.
Při volbě pevné báze $\underline{u}$ ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Afinní souřadnice

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic** $(A_0; u_1, \ldots, u_n)$ zadané **počátkem afinní souřadné soustavy** A_0 a bazí zaměření $\underline{u}$.
Hovoříme také o **afinním repéru** $(A_0, \underline{u})$.
Afinní souřadnice bodu A v soustavě $(A_0, \underline{u})$ jsou souřadnicemi vektoru $A - A_0$ v bázi $\underline{u}$ zaměření V.

Definition (Afinní podprostory)

Neprázdná podmnožina $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}_n$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ se zaměřením V se nazývá **afinní podprostor** v $\mathcal{A}_n$, je-li podmnožina $W = \{B - A; A, B \in \mathcal{Q}\} \subset V$ vektorovým podprostorem a pro libovolné $A \in \mathcal{Q}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{Q}$.

Definition (Afinní podprostory)

Neprázdná podmnožina $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}_n$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ se zaměřením V se nazývá **afinní podprostor** v $\mathcal{A}_n$, je-li podmnožina $W = \{B - A; A, B \in \mathcal{Q}\} \subset V$ vektorovým podprostorem a pro libovolné $A \in \mathcal{Q}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{Q}$.

Skutečně je rozumné mít obě podmínky v definici, protože je snadné najít příklady podmnožin, které budou splňovat první, ale nikoliv druhou. (Např. přímka v rovině s vyjmutým jedním bodem.)

Generování podprostorů

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \langle \{B - A; B, A \in M\} \rangle \subset V.$$

Zejména je $V = Z(\mathcal{A})$ a každý afinní podprostor $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ splňuje sám axiomy afinního prostoru se zaměřením $Z(\mathcal{Q})$.

Generování podprostorů

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \langle \{B - A; B, A \in M\} \rangle \subset V.$$

Zejména je $V = Z(\mathcal{A})$ a každý afinní podprostor $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ splňuje sám axiomy afinního prostoru se zaměřením $Z(\mathcal{Q})$.
Přímo z definic je zřejmé, že průnik libovolné množiny afinních podprostorů je buď opět afinní podprostor nebo prázdná množina.

Generování podprostorů

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \langle \{B - A; B, A \in M\} \rangle \subset V.$$

Zejména je $V = Z(\mathcal{A})$ a každý afinní podprostor $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ splňuje sám axiomy afinního prostoru se zaměřením $Z(\mathcal{Q})$.
Přímo z definic je zřejmé, že průnik libovolné množiny afinních podprostorů je buď opět afinní podprostor nebo prázdná množina. Afinní podprostor $\langle M \rangle$ v $\mathcal{A}$ *generovaný* neprázdnou podmnožinou $M \subset \mathcal{A}$ je průnikem všech afinních podprostorů, které obsahují všechny body podmnožiny M.

Přímo z definic plyne, že pro kterýkoliv bod $A_0 \in M$ je $\langle M \rangle = \{A_0 + v; v \in Z(M) \subset Z(\mathcal{A})\}$, tj. pro generování afinního podprostoru vezmeme vektorový podprostor $Z(M)$ v zaměření generovaný všemi rozdíly bodů z M a ten pak přičteme k libovolnému z nich. Hovoříme také o **afinním obalu** množiny bodů M v $\mathcal{A}$.

Přímo z definic plyne, že pro kterýkoliv bod $A_0 \in M$ je $\langle M \rangle = \{A_0 + v; v \in Z(M) \subset Z(\mathcal{A})\}$, tj. pro generování afinního podprostoru vezmeme vektorový podprostor $Z(M)$ v zaměření generovaný všemi rozdíly bodů z M a ten pak přičteme k libovolnému z nich. Hovoříme také o **afinním obalu** množiny bodů M v $\mathcal{A}$.

Naopak, kdykoliv zvolíme podprostor U v zaměření $Z(\mathcal{A})$ a jeden pevný bod $A \in \mathcal{A}$, pak podmnožina $A + U$ vzniklá všemi možnými součty bodů A s vektory v U je afinní podprostor. Takový postup vede k pojmu parametrizace podprostorů:

Přímo z definic plyne, že pro kterýkoliv bod $A_0 \in M$ je $\langle M \rangle = \{A_0 + v; v \in Z(M) \subset Z(\mathcal{A})\}$, tj. pro generování afinního podprostoru vezmeme vektorový podprostor $Z(M)$ v zaměření generovaný všemi rozdíly bodů z M a ten pak přičteme k libovolnému z nich. Hovoříme také o **afinním obalu** množiny bodů M v $\mathcal{A}$.

Naopak, kdykoliv zvolíme podprostor U v zaměření $Z(\mathcal{A})$ a jeden pevný bod $A \in \mathcal{A}$, pak podmnožina $A + U$ vzniklá všemi možnými součty bodů A s vektory v U je afinní podprostor. Takový postup vede k pojmu parametrizace podprostorů:

Nechť $\mathcal{Q} = A + Z(\mathcal{Q})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$ a $(u_1, \dots, u_k)$ je báze $Z(\mathcal{Q}) \subset \mathbb{R}^n$. Pak vyjádření podprostoru

$$\mathcal{Q} = \{A + t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme **parametrický popis** podprostoru $\mathcal{Q}$. Jeho zadání systémem rovnic v daných souřadnicích je **implicitní popis** podprostoru $\mathcal{Q}$.

Example

Příklady afinních prostorů (1) Jednorozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů reálné přímky $\mathcal{A}_1$. Její zaměření je jednorozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}$ (a nosná množina také $\mathbb{R}$). Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a měřítka (tj. báze ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}$). Všechny vlastní afinní podprostory jsou 0-rozměrné, jsou to právě všechny body reálné přímky R.
(2) Dvourozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru $\mathcal{A}_2$ se zaměřením $\mathbb{R}^2$. (Nosnou množinou je $\mathbb{R}^2$.) Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a dvou nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body a přímky v rovině (0-rozměrné a 1-rozměrné). Přímky přitom jednoznačně zadáme jejich jedním bodem a jedním generátorem zaměření (tzv. parametrický popis přímky).

Example

(3) Trojrozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru $\mathcal{A}_3$ se zaměřením $\mathbb{R}^3$. Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a tří nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body, přímky a roviny (0-rozměrné, 1-rozměrné a 2-rozměrné).
(4) Podprostor všech řešení jedné lineární rovnice $a \cdot x = b$ pro neznámý bod $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n$, známý nenulový vektor koeficientů $(a_1, \dots, a_n)$ a skalár $b \in \mathbb{R}$ je afinní podprostor dimenze $n - 1$ (říkáme také, že je kodimenze 1), tj. tzv. **nadrovina v** A_n.

Theorem

Nechť $(A_0; \underline{u})$ je afinní souřadný systém v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$. Afinní podprostory dimenze k v $\mathcal{A}$, vyjádřené v daných souřadnicích, jsou právě množiny řešení řešitelných systémů $n - k$ lineárně nezávislých lineárních rovnic v n proměnných.

Afinní kombinace bodů

Nechť $A_0, \ldots, A_k$ jsou body v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Jejich afinní obal $\langle\{A_0 \ldots, A_k\}\rangle$ můžeme zapsat jako

$$\{A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0); t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

a v libovolných afinních souřadnicích (tj. A_i je vyjádřen sloupcem skalárů) můžeme tutéž množinu zapsat jako

$$\langle A_0, \ldots, A_k\rangle = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k; t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Obecně výrazy $t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k$ s koeficienty splňujícícmi $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ rozumíme body $A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)$ a nazýváme je **afinní kombinace bodů**.

Body $A_0 \dots, A_k$ jsou v **obecné poloze**, jestliže generují k-rozměný podprostor. Z našich definic je vidět, že to nastane právě, když pro kterýkoliv z nich platí, že vektory vzniklé pomocí rozdílů tohoto pevného s ostatními jsou lineárně nezávislé. Všimněme si také, že zadání posloupnosti $\dim \mathcal{A}$ bodů v obecné poloze je ekvivalentní zadání afinního repéru s středem v prvním z nich.

Body $A_0 \dots, A_k$ jsou v **obecné poloze**, jestliže generují k-rozměný podprostor. Z našich definic je vidět, že to nastane právě, když pro kterýkoliv z nich platí, že vektory vzniklé pomocí rozdílů tohoto pevného s ostatními jsou lineárně nezávislé. Všimněme si také, že zadání posloupnosti $\dim \mathcal{A}$ bodů v obecné poloze je ekvivalentní zadání afinního repéru s středem v prvním z nich.
Afinní kombinace je obdobná konstrukce pro body afinního prostoru jako byla lineární kombinace pro vektorové prostory. Skutečně, afinní podprostor generovaný body $A_0 \dots, A_k$ je roven množině všech afinních kombinací svých generátorů. Můžeme však nyní dobře zobecnit i pojem „mezi dvěma body na přímce“. V dvojrozměrném případě tomu odopovídá vnitřek trojúhelníku. Obecně budeme postupovat takto:

Nechť $A_0, \ldots, A_k$ je $k+1$ bodů afinního prostoru $\mathcal{A}$ v obecné poloze. k–rozměrný **simplex** $\Delta = \Delta(A_0, \ldots, A_k)$ generovaný těmito body je definován jako množina všech afinních kombinací bodů A_i s pouze nezápornými koeficienty, tzn.

$$\Delta = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k; t_i \in [0,1] \subset \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Jednorozměrný simplex je **úsečka**, dvourozměrný **trojúhelník**. Zadání podprostoru jako množiny afinních kombinací bodů v obecné poloze je ekvivalentní parametrickému popisu. Obdobně pracujeme s parametrickými popisy simplexů.

Plán přednášky

Podmnožina M afinního prostoru se nazývá **konvexní**, jestliže s každými svými dvěma body A, B obsahuje i celou úsečku $\Delta(A, B)$. Přímo z definice je vidět, že každá konvexní množina obsahuje s každými $k+1$ body v obecné poloze i celý jimi definovaný simplex. Konvexními množinami jsou např.

(1) prázdná podmnožina

(2) afinní podprostory

(3) úsečky, polopřímky $p = \{P + t \cdot v;\ t \geq 0\}$, obecněji k–rozměrné poloprostory

$\alpha = \{P + t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_k \cdot v_k;\ t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}, t_k \geq 0\}$, úhly v dvojrozměrných podprostorech

$\beta = \{P + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2;\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$, atd.

Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu M nazýváme **konvexní obal** $\mathcal{K}(M)$ množiny M.

Theorem

Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1 A_1 + \cdots + t_s A_s;\ \sum_{i=1}^{s} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$$

Theorem

Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1A_1 + \cdots + t_sA_s;\ \sum_{i=1}^{s} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$$

Konvexní obaly konečných množin bodů se nazývají **konvexní mnohostěny**. Jsou-li definující body $A_0, \ldots, A_k$ konvexního mnohostěnu v obecné poloze, dostáváme právě k-rozměrný **simplex**. V případě simplexu je vyjádření jeho bodů ve tvaru afinní kombinace definujících vrcholů jednoznačné.

Jiným příkladem jsou konvexní podmnožiny generované jedním bodem a konečně mnoha vektory: Nechť $u_1, \dots, u_k$, jsou libovolné vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{A}_n$ je libovolný bod. *Rovnoběžnostěn* $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \dots + c_k u_k;\ 0 \le c_i \le 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ nezávislé, hovoříme o k-rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$. Z definice je zřejmé, že rovnoběžnostěny jsou konvexní. Ve skutečnosti jde o konvexní obaly jejich vrcholů.

Plán přednášky

(1) *K podprostoru zadanému implicitně nalézt parametrický popis a naopak:*
Nalezením partikulárního řešení nehomogenního systému a fundamentálního řešení zhomogenizovaného systému rovnic získáme (v souřadnicích, ve kterých byly rovnice zadány) právě hledaný parametrický popis. Naopak, zapíšeme-li parametrický popis v souřadnicích, můžeme volné parametry $t_1, \dots, t_k$ vyeliminovat a získáme právě rovnice zadávající daný podprostor implicitně.
(2) *Nalézt podprostor generovaný několika podprostory $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$ (obecně různých dimenzí, např. v R_3 nalézt rovinu danou bodem a přímkou, třemi body apod.) a zadat jej implicitně či parametricky:*
Výsledný podprostor $\mathcal{Q}$ je vždy určen jedním pevně zvoleným bodem A_i v každém z nich a součtem všech zaměření. Např.

$$\mathcal{Q} = A_1 + (Z(\{A_1, \dots, A_k\}) + Z(\mathcal{Q}_1) + \dots + Z(\mathcal{Q}_s)).$$

(3) *Nalézt průnik podprostorů* $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$*:*
Pokud jsou zadány v implicitním tvaru, stačí sjednotit všechny rovnice do jednoho systému (a případně vynechat lineárně závislé). Pokud je vzniklý systém neřešitelný, je průnik prázdný. V opačném případě získáme implicitní popis afinního podprostoru, který je hledaným průnikem.
Pokud máme dány parametrické tvary, můžeme také hledat přímo společné body jako řešení vhodných rovnic, podobně jako při hledání průniků vektorových podprostorů. Získáme tak přímo opět parametrický popis. Pokud je podprostorů více než dva, musíme průnik hledat postupně.
Máme-li jeden prostor zadaný parametricky a ostatní implicitně, stačí dosadit parametrizované souřadnice a řešit výsledný systém rovnic.

(4) *Nalezení příčky mimoběžek p, q v $\mathcal{A}_3$ procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření):*
Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběmi mimoběžkami. Výsledná příčka r tedy bude jednorozměrným afinním podprostorem. Pokud máme zadán jeho bod $A \in r$, pak afinní podprostor generovaný p a A je buď přímka ($A \in p$) nebo rovina ($A \notin p$). V prvém případě máme nekonečně mnoho řešení, jedno pro každý bod z q, v druhém stačí najít průnik B roviny $\langle p \cup A \rangle$ s q a $r = \langle \{A, B\} \rangle$. Pokud je průnik prázdný, úloha nemá řešení, v případě že $q \subset \langle p \cup A \rangle$, máme opět nekonečně mnoho řešení, a pokud je průnik jednoprvkový, dostáváme právě jedno řešení.
Máme-li místo bodu dán směr $u \in \mathbb{R}^n$, tj. zaměření r, pak uvažujeme opět podprostor $\mathcal{Q}$ generovaný p a zaměřením $Z(p) + \langle u \rangle \subset \mathbb{R}^n$. Opět, pokud $q \subset \mathcal{Q}$, máme nekonečně mnoho řešení, jinak uvážíme průnik $\mathcal{Q}$ s q a úlohu dokončíme stejně jako v předchozím případě.

Plán přednášky

1. Afinní geometrie
2. Konvexní množiny
3. Standardní úlohy
4. Transformace souřadnic

Dvě libovolně zvolené afinní soustavy souřadnic $(A_0, \underline{u})$, $(B_0, \underline{v})$ se obecně liší posunutím počátku o vektor $(B_0 - A_0)$ a jinou bazí zaměření. Transformační rovnice tedy vyčteme ze vztahu pro obecný bod $X \in \mathcal{A}$

$$X = B_0 + x_1' v_1 + \dots + x_n' v_n = B_0 + (A_0 - B_0) + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Označme $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ sloupec souřadnic vektoru $(A_0 - B_0)$ v bázi $\underline{v}$ a $M = (a_{ij})$ buď matice vyjadřující bázi $\underline{u}$ prostřednictvím báze $\underline{v}$. Potom

$$\begin{aligned} x_1' &= y_1 + a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= y_n + a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n \end{aligned}$$

tj. maticově

$$x' = y + M \cdot x.$$