Matematika I – 13a
Projektivní rozšíření

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

12. 12. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

Theorem (věta o setrvačnosti)

Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \cdots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \cdots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.

Theorem (věta o setrvačnosti)

Pro každou nenulovou kvadratickou formu hodnosti r na reálném vektorovém prostoru V existuje celé číslo $0 \leq p \leq r$ a r nezávislých lineárních forem $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ takových, že

$$f(u) = (\varphi_1(u))^2 + \cdots + (\varphi_p(u))^2 - (\varphi_{p+1}(u))^2 - \cdots - (\varphi_r(u))^2.$$

Jinak řečeno, existuje polární báze, ve které má f analytické vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

Počet p kladných diagonálních koeficientů v matici dané kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze.
Dvě symetrické matice A, B dimenze n jsou maticemi téže kvadratické formy v různých bazích právě, když mají stejnou hodnost a když matice příslušných forem v polární bázi mají stejný počet kladných koeficientů.

Theorem (Sylvestrovo kriterium)

Symetrická reálná matice A je pozitivně definitní, právě když jsou všechny její hlavní minory kladné.
Matice je negativně definitní, právě když platí $(-1)^i|A_i| > 0$ pro všechny hlavní submatice A_i.

Theorem (Jacobiho věta)

Uvažme kvadratickou formu f hodnosti r s maticí A v dané bázi. V Langrangeově algritmu není třeba jiných kroků než doplňování čtverců, právě když jsou hlavní minory $|A_i| \neq 0$ pro všechny $i = 1, \dots, r$. Pak existuje polární báze, ve které má f vyjádření

$$f(x_1, \dots, x_n) = |A_1|x_1^2 + \frac{|A_2|}{|A_1|}x_2^2 + \dots + \frac{|A_r|}{|A_{r-1}|}x_r^2$$

Plán přednášky

Na mnoho praktických úloh euklidovská nebo afinní geometrie stačí, na jiné bohužel ale nikoliv:

Na mnoho praktických úloh euklidovská nebo afinní geometrie stačí, na jiné bohužel ale nikoliv:

- při zpracovávání obrazu z kamery nejsou zachovávány úhly a rovnoběžné přímky se mohou (ale nemusí) protínat.
- robustnost a jednoduchost numerických operací při zpracování scén.

Na mnoho praktických úloh euklidovská nebo afinní geometrie stačí, na jiné bohužel ale nikoliv:

- při zpracovávání obrazu z kamery nejsou zachovávány úhly a rovnoběžné přímky se mohou (ale nemusí) protínat.
- robustnost a jednoduchost numerických operací při zpracování scén.

Základní ideou projektivní geometrie je rozšíření afinních prostorů o body v nekonečnu způsobem, který bude dobře umožňovat manipulace s lineárními objekty typu bodů, přímek, rovin, projekcí, apod.

Body roviny $\mathcal{A}_2$ si představíme jako rovinu $z = 1$ v $\mathcal{R}^3$. Pak každý bod P představuje vektor $u = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ a tím i jednorozměrný podprostor $\langle u \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Naopak, skoro každý podprostor v $\mathbb{R}^3$ protíná naši rovinu v právě jednom bodě P a jednotlivé vektory takového podprostoru jsou dány souřadnicemi (x, y, z) jednoznačně, až na společný skalární násobek. Žádný průnik s naší rovinou nebudou mít pouze podprostory s body o souřadnicích $(x, y, 0)$.

Body roviny $\mathcal{A}_2$ si představíme jako rovinu $z = 1$ v $\mathcal{R}^3$. Pak každý bod P představuje vektor $u = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ a tím i jednorozměrný podprostor $\langle u \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Naopak, skoro každý podprostor v $\mathbb{R}^3$ protíná naši rovinu v právě jednom bodě P a jednotlivé vektory takového podprostoru jsou dány souřadnicemi (x, y, z) jednoznačně, až na společný skalární násobek. Žádný průnik s naší rovinou nebudou mít pouze podprostory s body o souřadnicích $(x, y, 0)$.

Definition

Projektivní rovina $\mathcal{P}_2$ je množina všech jednorozměrných podprostorů v $\mathbb{R}^3$. **Homogenní souřadnice** bodu $P = (x : y : z)$ v projektivní rovině jsou trojice reálných čísel určené až na společný skalární násobek a alespoň jedno z nich musí být nenulové. Přímka v projektivní rovině je definována jako množina jednorozměrných podprostorů (tj. bodů v $\mathcal{P}_2$), které společně vyplní rovinu v $\mathbb{R}^3$.

Example

V afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme dvě přímky $L_1 : y - x - 1 = 0$ a $L_2 : y - x + 1 = 0$.
Jsou-li body přímek L_1 a L_2 konečné body v projektivním prostoru $\mathcal{P}_2$, jsou jejich homogenní souřadnice $(x : y : z)$ dány:

$$L_1 : y - x - z = 0, \quad L_2 : y - x + z = 0.$$

Example

V afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme dvě přímky $L_1 : y - x - 1 = 0$ a $L_2 : y - x + 1 = 0$.
Jsou-li body přímek L_1 a L_2 konečné body v projektivním prostoru $\mathcal{P}_2$, jsou jejich homogenní souřadnice $(x : y : z)$ dány:

$$L_1 : y - x - z = 0, \quad L_2 : y - x + z = 0.$$

Jak dostaneme rovnice těchto přímek v souřadnicích v afinní rovině s $y = 1$? Dosadíme $y = 1$ do předchozích rovnic:

$$L_1' : 1 - x - z = 0, \quad L_2' : 1 - x + z = 0$$

Example

V afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme dvě přímky $L_1 : y - x - 1 = 0$ a $L_2 : y - x + 1 = 0$.
Jsou-li body přímek L_1 a L_2 konečné body v projektivním prostoru $\mathcal{P}_2$, jsou jejich homogenní souřadnice $(x : y : z)$ dány:

$$L_1 : y - x - z = 0, \quad L_2 : y - x + z = 0.$$

Jak dostaneme rovnice těchto přímek v souřadnicích v afinní rovině s $y = 1$? Dosadíme $y = 1$ do předchozích rovnic:

$$L_1' : 1 - x - z = 0, \quad L_2' : 1 - x + z = 0$$

Nyní jsou „nekonečné“ body naší původní afinní roviny dány vztahem $z = 0$ a naše přímky L_1' a L_2' se protínají v bodě $(1, 1, 0)$. To odpovídá geometrické představě, že rovnoběžné přímky L_1, L_2 v afinní rovině se protínají v nekonečnu (a to v bodě $(1 : 1 : 0)$).

Volbou libovolné afinní nadroviny $\mathcal{A}_n$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, která neprochází počátkem, můžeme ztotožnit body $P \in \mathcal{A}_n$ s jednorozměrnými podprostory, které tyto generují. Zbylé jednorozměrné podprostory vyplní rovinu rovnoběžnou s $\mathcal{A}_n$ a říkáme jim „nekonečné body“ v projektivním rozšíření $\mathcal{P}_n$ afinní nadroviny $\mathcal{A}_n$. Zjevně je vždy množina nekonečných bodů v $\mathcal{P}_n$ projektivním prostorem dimenze o jedničku nižším. Abstraktněji hovoříme o **projektivizaci vektorového prostoru**: pro libovolný vektorový prostor V dimenze $n+1$ definujeme

$$\mathcal{P}(V) = \{P \subset V;\ P \text{ je jednorozměrný vektorový podprostor}\}.$$

Volbou libovolné afinní nadroviny $\mathcal{A}_n$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, která neprochází počátkem, můžeme ztotožnit body $P \in \mathcal{A}_n$ s jednorozměrnými podprostory, které tyto generují. Zbylé jednorozměrné podprostory vyplní rovinu rovnoběžnou s $\mathcal{A}_n$ a říkáme jim „nekonečné body“ v projektivním rozšíření $\mathcal{P}_n$ afinní nadroviny $\mathcal{A}_n$. Zjevně je vždy množina nekonečných bodů v $\mathcal{P}_n$ projektivním prostorem dimenze o jedničku nižším. Abstraktněji hovoříme o **projektivizaci vektorového prostoru**: pro libovolný vektorový prostor V dimenze $n+1$ definujeme

$$\mathcal{P}(V) = \{P \subset V;\ P \text{ je jednorozměrný vektorový podprostor}\}.$$

Volbou libovolné báze $\underline{u}$ ve V dostáváme tzv. **homogenní souřadnice** na $\mathcal{P}(V)$ tak, že pro $P \in \mathcal{P}(V)$ použijeme jeho libovolný nenulový vektor $u \in V$ a souřadnice tohoto vektoru v bázi $\underline{u}$. Afinní přímka má tedy ve svém projektivním rozšíření pouze jediný bod (oba konce se „potkají“ v nekonečnu a projektivní přímka vypadá jako kružnice), projektivní rovina má projektivní přímku nekonečných bodů atd.

Při zvolených homogenních souřadnicích je možné jednu z jejich hodnot zafixovat na jedničku (tj. vyloučíme všechny body projektivního prostoru s touto souřadnicí nulovou) a získáme tak vložení n–rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(V)$. To je přesně konstrukce, kterou jsme použili v opačném směru v příkladu projektivní roviny.

Při zvolených homogenních souřadnicích je možné jednu z jejich hodnot zafixovat na jedničku (tj. vyloučíme všechny body projektivního prostoru s touto souřadnicí nulovou) a získáme tak vložení n–rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(V)$. To je přesně konstrukce, kterou jsme použili v opačném směru v příkladu projektivní roviny.

Každé prosté lineární zobrazení $\tau : V_1 \to V_2$ mezi vektorovými prostory samozřejmě zobrazuje jednorozměrné podprostory na jednorozměrné podprostory. Tím vzniká zobrazení na projektivizacích $T : \mathcal{P}(V_1) \to \mathcal{P}(V_2)$. Takovým zobrazením říkáme **projektivní zobrazení**. Jinak řečeno, projektivní zobrazení je takové zobrazení mezi projektivními prostory, že v každé soustavě homogenních souřadnic na definičním oboru i obrazu je toto zobrazení zadáno násobením vhodnou maticí. Obecněji, pokud naše pomocné lineární zobrazení není prosté, definuje projektivní zobrazení pouze mimo svoje jádro, tj. na bodech, jejichž homogenní souřadnice se nezobrazují na nulu.

Ilustrujme výhodu projektivní geometrie na perspektivní projekci $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Bod (X, Y, Z) „reálného světa“ se promítá na bod (x, y) na průmětně takto:

$$x = -f\frac{X}{Z}, \quad y = -f\frac{Y}{Z}.$$

To je nejen nelineární formule, ale navíc při Z malém bude velice problematická přesnost výpočtů.

Ilustrujme výhodu projektivní geometrie na perspektivní projekci $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Bod (X, Y, Z) „reálného světa“ se promítá na bod (x, y) na průmětně takto:

$$x = -f\frac{X}{Z}, \quad y = -f\frac{Y}{Z}.$$

To je nejen nelineární formule, ale navíc při Z malém bude velice problematická přesnost výpočtů.

Při rozšíření této transformace na zobrazení $\mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ dostáváme zobrazení $(X : Y : Z : W) \mapsto (x : y : z) = (-fX : -fY : Z)$, tj. popsané prostou lineární formulí

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

Tento jednoduchý výraz zadává perspektivní projekci pro všechny konečné body v $\mathbb{R}^3 \subset \mathcal{P}_3$, které dosazujeme jako výrazy s $W = 1$. Navíc jsme odstranili problémy s body, jejichž obraz leží v nekonečnu. Skutečně, je-li Z-ová souřadnice skutečného bodu scény blízká nule, bude hodnota třetí homogenní souřadnice obrazu mít souřadnici blízkou nule, tj. bude představovat bod blízký nekonečnu.

Invertibilní projektivní zobrazení projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$ na sebe odpovídají v homogenních souřadnicích invertibilním maticím dimenze $n+1$. Dvě takové matice zadávají stejnou projektivní transformaci právě, když se liší o konstantní násobek.

Invertibilní projektivní zobrazení projektivního prostoru $\mathcal{P}_n$ na sebe odpovídají v homogenních souřadnicích invertibilním maticím dimenze $n + 1$. Dvě takové matice zadávají stejnou projektivní transformaci právě, když se liší o konstantní násobek.
Jestliže si zvolíme první souřadnici jako tu, jejíž nulovost určuje nekonečné body, budou transformace, které zachovávají konečné body, dány maticemi, jejichž první řádek musí být až na první člen nulový. Jestliže budeme chtít přejít do afinních souřadnic konečných bodů, tj. zafixujeme si hodnotu první souřadnice na jedničku, musí být první prvek na prvním řádku být také rovný jedné.

Matice projektivních transformací zachovávajících konečné body tedy mají tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kde $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ a $A = (a_{ij})$ je invertibilní matice dimenze n. Působení takové matice na vektoru $(1, x_1, \dots, x_n)$ je právě obecná afinní transformace.

Plán přednášky

Jestliže popíšeme kvadriku v afinních souřadnicích pomocí obecné kvadratické rovnice, viz výše, jejím přepsáním v homogenních souřadnicích dostaneme vždy výlučně homogenní výraz, jehož všechny členy jsou druhého řádu. Důvod je ten, že pouze takové homogenní výrazy budou mít pro homogenní souřadnice smysl nezávisle na zvoleném konstantním násobku souřadnic $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Hledáme tedy takový, jehož zúžením na afinní souřadnice, tj. dosazením $x_0 = 1$, získáme původní výraz. To je ale mimořádně jednoduché, prostě dopíšeme dostatek x_0 ke všem výrazům – žádný ke kvadratickým členům, jedno k lineárním a x_0^2 ke konstantnímu členu.

Jestliže popíšeme kvadriku v afinních souřadnicích pomocí obecné kvadratické rovnice, viz výše, jejím přepsáním v homogenních souřadnicích dostaneme vždy výlučně homogenní výraz, jehož všechny členy jsou druhého řádu. Důvod je ten, že pouze takové homogenní výrazy budou mít pro homogenní souřadnice smysl nezávisle na zvoleném konstantním násobku souřadnic $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Hledáme tedy takový, jehož zúžením na afinní souřadnice, tj. dosazením $x_0 = 1$, získáme původní výraz. To je ale mimořádně jednoduché, prostě dopíšeme dostatek x_0 ke všem výrazům – žádný ke kvadratickým členům, jedno k lineárním a x_0^2 ke konstantnímu členu.
Získáme tak dobře definovanou kvadratickou formu na našem pomocném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, ale ty jsme už vůči libovolné volbě báze klasifikovali. Zkuste si samostatně převést tuto klasifikaci do projektivní i afinní podoby. (Hezké a náročné cvičení na závěr semestru!)