Matematika I – 9b
Volby bazí a vlastnosti lineárních zobrazení

Jan Slovák

Masarykova univerzita

14. 11. 2011

Obsah přednášky

Plán přednášky

Iterované procesy

Procesy bývají popsány prostřednictvím lineární operace pro jednotlivá časová období (linearizovaný model). Budeme chtít studovat jeho chování během delší doby.

Example

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty jako takový proces – vektor posledních k hodnot x_i převádíme násobením konstatní maticí A tak, že další novou hodnotu spočteme a nejstarší hodnotu zapomeneme.
Fundamentální systém řešení jsme hledali ve tvaru vlastních vektorů pro matici A!
Charakteristický polynom matice A splývá s charakteristickým polynomem rovnice z minulé přednášky!

populační modely

Představme si, že zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod) rozdělený do m skupin (třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod.).

- Stav x_n je tedy dán vektorem $(a_1, \dots, a_m)$ závisejícím na okamžiku t_n, ve kterém systém pozorujeme.
- Lineární model vývoje takového systému je dán maticí A dimenze n, která zadává změnu vektoru x_n na

$$x_{n+1} = A \cdot x_n$$

při přírůstku času z t_k na t_{k+1}.

Leslieho model

Příkladem lineárních procesů je *Leslieho model růstu* s maticí (pro $m = 5$)

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \end{pmatrix},$$

ve které:

Leslieho model

Příkladem lineárních procesů je *Leslieho model růstu* s maticí (pro $m = 5$)

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \end{pmatrix},$$

ve které:

- f_i označuje relativní plodnost příslušné věkové skupiny (ve sledovaném časovém skoku vznikne z N jedinců v i–té skupině $f_i N$ jedinců nových, tj. ve skupině první);
- τ_i je relativní úmrtnost i-té skupiny během jednoho období.

Všechny koeficienty jsou tedy nezáporná reálná čísla a τ jsou mezi nulou a jedničkou. Přímým výpočtem (využitím Laplaceova rozvoje) spočteme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^5 - a\lambda^4 - b\lambda^3 - c\lambda^2 - d\lambda - e$$

s vesměs nezápornými koeficienty a, b, c, d, e, např. $e = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 f_5$.

Všechny koeficienty jsou tedy nezáporná reálná čísla a τ jsou mezi nulou a jedničkou. Přímým výpočtem (využitím Laplaceova rozvoje) spočteme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^5 - a\lambda^4 - b\lambda^3 - c\lambda^2 - d\lambda - e$$

s vesměs nezápornými koeficienty a, b, c, d, e, např. $e = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 f_5$. Je tedy

$$p(\lambda) = \lambda^5(1 - q(\lambda))$$

kde q je ostře klesající a nezáporná funkce pro $\lambda > 0$. Evidentně bude proto existovat právě jedno kladné λ, pro které bude $q(\lambda) = 1$ a tedy $p(\lambda) = 0$. Jinými slovy, **pro každou Leslieho matici existuje právě jedno kladné vlastní číslo λ_0.**

Pro konkrétní koeficienty může být dominantní vlastní číslo λ_0 vetší než jedna, zatímco absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel λ_i budou ostře menší než jedna. Iterace dávají pro každý vektor $v = v_0 + v_1 +$ rozložený na vlastní vektory matice (pomíjíme teď složitější možnost různých algebraických a geometrických násobností jednotlivých vlastních čísel)

$$\varphi^k(v) = \lambda_0^k v_0 + \lambda_1^k v_1 + \dots.$$

Pro konkrétní koeficienty může být dominantní vlastní číslo λ_0 vetší než jedna, zatímco absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel λ_i budou ostře menší než jedna. Iterace dávají pro každý vektor $v = v_0 + v_1 +$ rozložený na vlastní vektory matice (pomíjíme teď složitější možnost různých algebraických a geometrických násobností jednotlivých vlastních čísel)

$$\varphi^k(v) = \lambda_0^k v_0 + \lambda_1^k v_1 + \dots .$$

V takovém případě při iteraci kroků našeho procesu dojde při libovolné počáteční hodnotě x_0 k postupnému vymizení všech komponent v jednotlivých vlastních podprostorech kromě v_0. Poměrné proporce rozložení populace do věkových skupin se budou blížit poměrům komponent vlastního vektoru k dominantnímu vlastnímu číslu.

Markovovy procesy

Speciálním případem lineráních procesů je případ, kdy A je tzv. stochastická matice, tj. sloupce v ní jsou stochastické vektory určující rozdělení pravděpodobnosti systému s konečně mnoha stavy. Hovoříme o **diskrétních Markovových procesech**.

Plán přednášky

Theorem (Perronova–Frobeniova věta)

Nechť A je reálná čtvercová matice dimenze m s kladnými prvky. Pak platí

1. *existuje reálné vlastní číslo λ_m matice A takové, že pro všchna ostatní vlastní čísla λ platí $|\lambda| < \lambda_m$,*
2. *vlastní číslo λ_m má algebraickou násobnost jedna,*
3. *vlastní podprostor odpovídající λ_m obsahuje vektor se všemi souřadnicemi kladnými*
4. *platí odhad $\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_m \leq \max_i \sum_j a_{ij}$.*

Theorem (Perronova–Frobeniova věta)

Nechť A je reálná čtvercová matice dimenze m s kladnými prvky. Pak platí

1. *existuje reálné vlastní číslo λ_m matice A takové, že pro všchna ostatní vlastní čísla λ platí $|\lambda| < \lambda_m$,*
2. *vlastní číslo λ_m má algebraickou násobnost jedna,*
3. *vlastní podprostor odpovídající λ_m obsahuje vektor se všemi souřadnicemi kladnými*
4. *platí odhad $\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_m \leq \max_i \sum_j a_{ij}$.*

Tvrzení bezezbytku platí i pro tzv. regulární matice, tj. takové, jejichž nějaká mocnina má výhradně kladné prvky. Takové jsou např. Leslieho matice se všemi parametry nenulovými.

Důsledkem této věty pro Markovovy procesy s maticí, která nemá žádné nulové prvky (nebo jejíž některá mocnina má tuto vlastnost), je

- existence vlastního vektoru x_∞ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní
- přibližování hodnoty iterací $T^k x_0$ k vektoru x_∞ pro jakýkoliv pravděpodobnostní vektor x_0.

První tvrzení vyplývá přímo z kladnosti souřadnic vlastního vektoru zmíněné v Perronově–Frobeniově větě, druhé pak z toho, že absolutní hodnoty všech ostatních vlastních čísel musí být ostře menší než jedna.

Důkaz Perronovy–Frobeniovy věty

Odvození těchto výsledků je docela složité – viz tabule nebo texty ...