$\boxed{ax = b}$ $\mathbb{Z}_2$ — $0 \cdot x = b$; $a \neq 0 \Rightarrow x = a^{-1} \cdot b$

Zbytkové třídy $\mathbb{Z}_k$ $k \in \mathbb{N}, k > 1$

Např. $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ $[x] \in \mathbb{Z}_2$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

9 19-10:00

$\mathbb{Z}_6$

+ ·	0	1	2	3	4	5
0	0 0	1 0	2 0	3 0	4 0	5 0
1	1 0	2 1	3 2	4 3	5 4	0 5
2	2 0	3 2	4 4	5 0	0 2	1 4
3	3 0	4 3	5 0	0 3	1 0	2 3
4	4 0	5 4	0 2	1 0	2 4	3 2
5	5 0	0 5	1 4	2 3	3 2	4 1

má dělitele nuly!

Tvrzení: $\mathbb{Z}_p$ je pole $\Leftrightarrow$ p prvočíslo

9 19-10:26

$\sqrt{2} = p/q$ $p = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ rozklad na prvočísla

$q = q_1^{t_1} \cdots q_m^{t_m}$

$\Rightarrow 2 \cdot q_1^{2t_1} \cdots q_m^{2t_m} = p_1^{2r_1} \cdots p_s^{2r_s}$

Spor

9 19-10:32

Ilustrace: Jak „vytvořit" $\mathbb{N}$

$0 := \emptyset$ $1: \{\emptyset\} = \{0\}$

$n+1 := \{0, 1, \dots, n\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \}$

$+, -, \cdot, 0, 1$

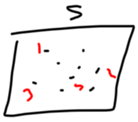
$a + b = ?$

9 19-10:37

permutace = přiřazení $S \to S$

$x \to \sigma(x)$

S S



9 19-10:45

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

1) zřejmé ✓

$$\frac{n!}{(n-k)!\underbrace{(n-(n-k))}_{=k}!}$$

2) $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \binom{n+1}{k+1}$$ ✓

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1

9 19-10:49

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]$$

$$= \sum_{k=\cancel{1}\,0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

✓

9 19-10:55

$$C(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

symboly a, b, c, d

a | bbb | c c | d

přihrádky

* | *** | ** | *

obecně $S = \{a_1, \dots, a_n\}$

→ řetězec $n+k$ znaků, mezi nimi $n+k-1$ míst pro $n-1$ přihrádky

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$\cancel{n}+k-\cancel{1}-\cancel{n}+\cancel{1}$

9 19-11:10

balík n karet + $(k-1)$ žolíků

vybrání r karet + s žolíků

$r+s=k \qquad r \geq 1,\ s \leq k-1$

$$\binom{n+k-1-r}{s} = \binom{k-1}{s} \longrightarrow$$

9 19-11:18

Diferenční rovnice

$$f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n \qquad (*)$$

1) pro $b_n = 0$ $\quad y_n = f(n)$ splňující $(*)$

$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad z_n = c \cdot y_n$ také řešení

2) známe-li $y_n = f(n)$ řešení $(*)$ s $b \neq 0$, tak všechna jsou tvaru $x_n = y_n + z_n$, kde z_n řeší $(*)$ s $b=0$.

Dk.
$$y_{n+1} - a_n y_n = b_n$$
$$\bar{y}_{n+1} - a_n \bar{y}_n = b_n$$

9 19-11:36

$f(0) = y_0 \qquad f(1) = a_0 y_0 + b_0$

$f(2) = a_1(a_0 y_0 + b_0) + b_1$

$f(3) = a_2(a_1(a_0 y_0 + b_0) + b_1) + b_2$

9 19-11:44

$f(n) = c\, f(n-1)$

$\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$

$\frac{\Delta f}{f} \sim r > 0$ pro přirozený vzrůst f $\quad (r = 0{,}05)$

pro hranici dané K kapacity

$y = \frac{\Delta f(n)}{f(n)}$ k nové křivce

$$\boxed{y = -\frac{r}{K} f + r}$$

9 19-11:48

$$\Rightarrow \quad \frac{f(n+1) - f(n)}{f(n)} = -\frac{r}{K} f(n) + r$$

$$\Rightarrow \quad f(n+1) = f(n)\left(1 - \frac{r}{K} f(n) + r\right)$$

9 19-11:51