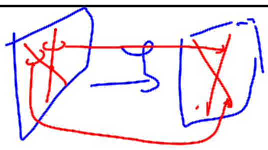
$\varphi : V \to V$



$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

změna báze:

$\boxed{A} \longmapsto T \cdot A \cdot T^{-1} = \boxed{B}$

1) $A \cdot x \overset{?}{=} \lambda \cdot x \qquad \underbrace{(A - \lambda E)} \cdot x = 0 \qquad x \neq 0$

$|A - \lambda E| = 0$

11 7-10:09

---

2) $(V, \cdot)$ φ ortogonální, samoadjungovaná

$\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \langle v, v \rangle \qquad \langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle$

$W \subset V \quad \varphi(W) \subset W$

$\Rightarrow \varphi(W^\perp) \subset W^\perp$

$\varphi(v) = \lambda_1 v$ | $\varphi|\langle v \rangle^\perp$ je zúžení

.... rozklad $A \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & \square & \\ & & & & \square \ \dots \end{pmatrix}$

$|\lambda_i| = 1$ pro ort.

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ pro samoadj.

11 7-10:18

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$? ort.

$\Leftrightarrow A \cdot A^T = E$

$\lambda_1 = \pm 1$, $\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm i \sin\theta$

u .. osa $\langle u \rangle^\perp$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$1, x, x^2$

$1, x, \frac{1}{2}x^2, \dots, \frac{1}{k!}x^k, \dots$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11 7-10:23

---

obecný případ $\varphi : V \to V$ nad $\mathbb{K}$

obecná báze

$(A - \lambda E)^k \cdot x = 0$ pro nějaké $k = 1, 2, \dots$

pro $k = 1$ ... vlastní podprostory příslušné λ

pro k obecné ... kořenové podprostory .. –

$V_\lambda = \{ x \in \mathbb{K}^n ;\ (A - \lambda E)^k \cdot x = 0$ pro nějaké $k \}$

$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_l}$ pro všechna vlastní čísla

$\dim V_{\lambda_i}$ = násobnost kořene λ_i

11 7-10:27

$\varphi|_{V_\lambda} : V_\lambda \to V_\lambda \qquad A$ matice

$\Rightarrow (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_{V_\lambda})$ je nilpotentní

cyklické φ: ve spec. bázi má matici

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

11 7-10:34

Tvrzení: Každý nilpotentní je přímý součet cyklických.

$\varphi : V \to V$ nilpotentní $\Rightarrow V = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$

$\varphi|_{V_i}$ je cyklické.

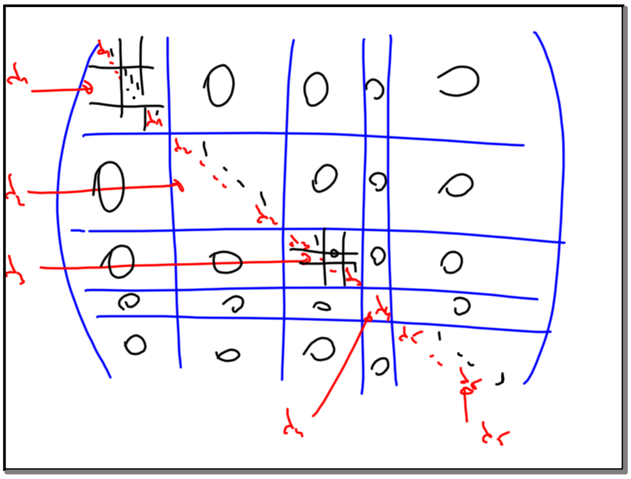
Hl. důsledek: $\varphi : V \to V$ obecné $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

$\forall i,\ V_{\lambda_i} = V_{\lambda_i,1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_i,e_i} \qquad (\varphi - \lambda_i \, \mathrm{id})|_{V_{\lambda_i,j}}$

je cyklické

11 7-10:37



11 7-10:40

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}} \qquad \boxed{x_i \geq 0}$$

$\boxed{c_1x_1 + \dots + c_nx_n}$ .. účelová fce

$b \in \mathbb{R}^m$

A typu m/n

$x \geq 0$

$x \in \mathbb{R}^n$

$x^* = y^T \to c \in \mathbb{R}^{n*}$

$(\ A\ )(x) \quad (b)$

$(y)^T(\ A\ ) \geq c^T$

$y^T \cdot b \leftarrow$ duální úč. fce

11 7-10:49

$$(c_1 \cdots c_n)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$c_i \leq y_1 a_{1i} + y_2 a_{2i} + \dots + y_m a_{mi}$$

$$\Leftarrow \quad \sum_i (y_1 a_{1i} + \dots + y_m a_{mi}) x_i = y^T \cdot A \cdot x$$

$x_1 + x_2 \leq L$ $\quad x_1 \geq 0$

$w_1x_1 + w_2x_2 \leq W$ $\quad x_2 \geq 0$

$b_1x_1 + b_2x_2 \leq B$

$c_1x_1 + c_2x_2$

$$h(A + tu) = h(A) + t\underbrace{(h(u))}_{\geq 0}$$

11 7-11:02

$$y^T \cdot b \geq y^T \cdot A \cdot x \geq c \cdot x$$

11 7-11:25

$V \xrightarrow{\varphi} V$ $\qquad \mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\qquad \dim V = n$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ $\quad$ kořeny $|A - \lambda E|$ vlastní čísla

$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

$$\left(\begin{array}{c|c} * & ? \\ \hline 0 & \end{array}\right)$$

$\boxed{W \subset V,\ \varphi(W) \subset W}$

$V/W = \{[v]\}$ $\quad v \sim w \Rightarrow w = v + z,\ z \in W$

$\boxed{\varphi_{V/W}(u + W) = \varphi(u) + W}$

$V = \langle \underbrace{u_1, \dots, u_\ell}_{W}, u_{\ell+1}, \dots, u_n \rangle$

$V/W = \langle u_{\ell+1} + W, \dots, u_n + W \rangle$

11 7-11:29

$n = 2$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2/W \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathbb{R}^2/W$

Schurova věta o triangularizaci,

$\Rightarrow$ po [illegible] V

11 7-11:40