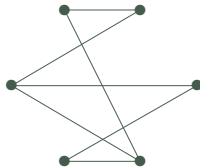
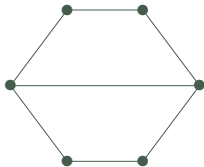


## 7 Pojem grafu, ve zkratce

Třebaže *grafy* jsou jen jednou z mnoha struktur v matematice a vlastně pouze speciálním případem *binárních relací*, vydobily si svou užitečností a názorností důležité místo na slunci.

Neformálně řečeno, graf se skládá z *vrcholů* (představme si je jako nakreslené „puntíky“) a z *hran*, které spojují dvojice vrcholů mezi sebou.



□

### Stručný přehled lekce

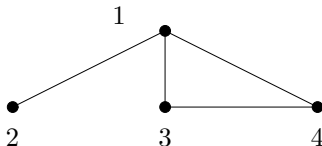
- \* Zavedení a pochopení grafů, jejich základní pojmy.
- \* Příklady běžných tříd grafů, podgrafy a isomorfismus, souvislost.
- \* Stromy a jejich speciální vlastnosti.

## 7.1 Definice grafu

**Definice 7.1. Graf** (jednoduchý neorient.) je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je množina *vrcholů* a  $E$  je množina *hran* – množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů.  $\square$

**Značení:** Hranu mezi vrcholy  $u$  a  $v$  píšeme jako  $\{u, v\}$ , nebo zkráceně  $uv$ . Vrcholy spojené hranou jsou *sousední* a hrana  $uv$  *vychází* z vrcholů  $u$  a  $v$ . Na množinu vrcholů grafu  $G$  odkazujeme jako na  $V(G)$ , na množinu hran  $E(G)$ .

Grafy se často zadávají přímo názorným obrázkem, jinak je lze formálně zadat výčtem vrcholů a výčtem hran. Například:



$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}$$

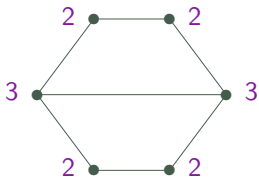
Na graf se lze dívat také jako na symetrickou ireflexivní relaci, kde hrany tvoří právě dvojice prvků z této relace.

## Stupně vrcholů v grafu

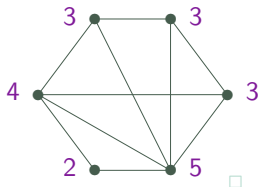
**Definice 7.2.** **Stupněm vrcholu**  $v$  v grafu  $G$

rozumíme počet hran vycházejících z  $v$ . Stupeň  $v$  v grafu  $G$  značíme  $d_G(v)$ .  $\square$

Slovo „vycházející“ zde nenaznačuje žádný směr; je totiž obecnou konvencí u neorientovaných grafů říkat, že hrana vychází z obou svých konců zároveň.



stupně



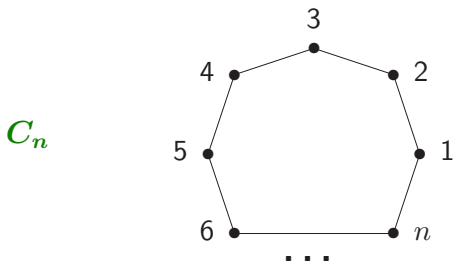
**Definice:** Graf je  $d$ -*regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň  $d$ .  $\square$

**Značení:** *Nejvyšší* stupeň v grafu  $G$  značíme  $\Delta(G)$  a *nejnižší*  $\delta(G)$ .  $\square$

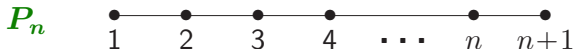
**Věta 7.3.** *Součet stupňů v grafu je vždy sudý, roven dvojnásobku počtu hran.*

## Běžné typy grafů

**Kružnice délky  $n$**  má  $n \geq 3$  vrcholů spojených do jednoho cyklu  $n$  hranami:

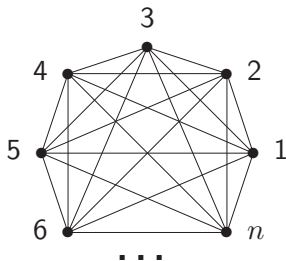


**Cesta délky  $n \geq 0$**  má  $n + 1$  vrcholů spojených za sebou  $n$  hranami:



**Úplný graf** na  $n \geq 1$  vrcholech má  $n$  vrcholů, všechny navzájem pospojované (tj. celkem  $\binom{n}{2}$  hran):

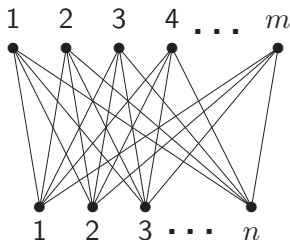
$K_n$



□

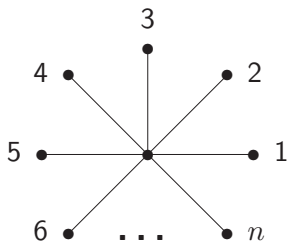
**Úplný bipartitní graf** na  $m \geq 1$  a  $n \geq 1$  vrcholech má  $m + n$  vrcholů ve dvou skupinách (partitách), přičemž hranami jsou pospojované všechny  $m \cdot n$  dvojice z různých skupin:

$K_{m,n}$



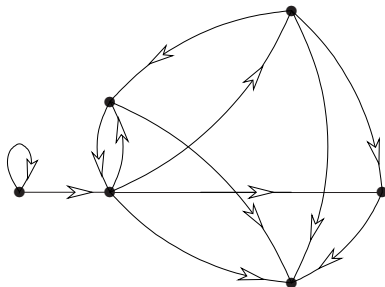
Hvězda s  $n \geq 1$  rameny je zvláštní název pro úplný bipartitní graf  $K_{1,n}$ :

$S_n$



## Zmínka o orientovaných grafech

V Lekci 9 si zavedeme také takzvané *orientované grafy*, které každé hraně přiřazují jistý směr. Formálně orientované grafy budou mít množinu orientovaných hran  $A \subseteq V(G) \times V(G)$  a zobrazíme je takto. . .

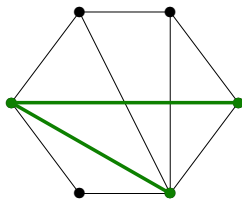
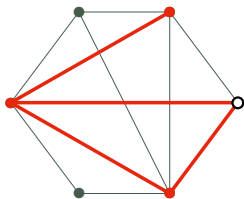


## 7.2 Podgrafy a Isomorfismus

**Definice:** *Podgrafem* grafu  $G$  rozumíme libovolný graf  $H$  na podmnožině vrcholů  $V(H) \subseteq V(G)$ , který má za hrany **libovolnou** podmnožinu hran grafu  $G$  majících oba vrcholy ve  $V(H)$ .

Píšeme  $H \subseteq G$ , tj. stejně jako množinová inkluze (ale význam je trochu jiný).□

Na následujícím obrázku vidíme zvýrazněné podmnožiny vrcholů hran. Proč se vlevo nejedná o podgraf? Obrázek vpravo už podgrafem je.

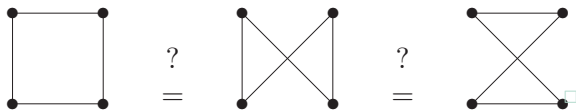


□

**Definice:** *Indukovaným podgrafem* je podgraf  $H \subseteq G$  takový, který obsahuje **všechny hrany** grafu  $G$  mezi dvojicemi vrcholů z  $V(H)$ .



## „Stejnost“ grafů



**Definice 7.4.** **Isomorfismus**  $\simeq$  grafů  $G$  a  $H$

je bijektivní zobrazení  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , pro které každá dvojice  $u, v \in V(G)$  je spojená hranou v  $G$  právě, když je dvojice  $f(u), f(v)$  spojená hranou v  $H$ .

Grafy  $G$  a  $H$  jsou **isomorfní**,  $G \simeq H$ , pokud mezi nimi existuje isomorfismus.  $\square$

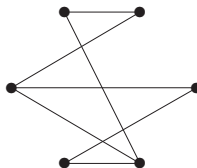
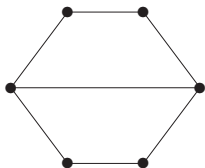
**Fakt:** Mějme isomorfismus  $f$  grafů  $G$  a  $H$ . Pak platí následující

- \*  $G$  a  $H$  mají stejný počet hran,
- \*  $f$  zobrazuje na sebe vrcholy stejných stupňů, tj.  $d_G(v) = d_H(f(v))$ .  $\square$



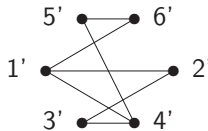
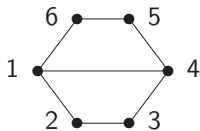
U nakreslených dvou grafů objevíme isomorfismus velmi snadno – podíváme se, jak si odpovídají vrcholy stejných stupňů.

### Příklad 7.5. Jsou následující dva grafy isomorfní?



Pokud mezi nakreslenými dvěma grafy hledáme isomorfismus, nejprve se podíváme, zda mají **stejný počet vrcholů a hran**. □ Mají. Pak se podíváme na stupně vrcholů a zjistíme, že oba mají **stejnou posloupnost stupňů 2, 2, 2, 2, 3, 3**. □ Takže ani takto jsme mezi nimi nerozlišili a mohou (nemusejí!) být isomorfní. Dále tedy nezbývá, než zkusit **všechny přípustné možnosti** zobrazení isomorfismu z levého grafu do pravého. □

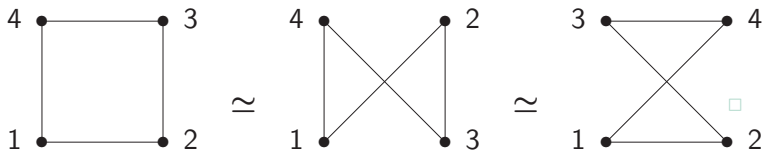
Na levém grafu si pro ulehčení všimněme, že oba vrcholy stupně tři jsou si symetrické, proto si bez újmy na obecnosti můžeme vybrat, že vrchol označený 1 se zobrazí na 1'. Druhý vrchol stupně tři, označený 4, se musí zobrazit na analogický vrchol druhého grafu 4'. A zbytek již plyne snadno:



□

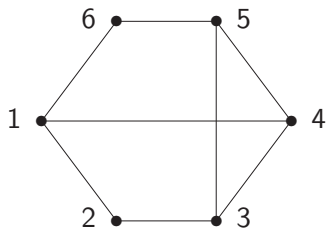
## Důsledek: Stejnost grafů jako isomorfismus!

Graf  $G$   $\longleftrightarrow$  Celá  
třída isomorfismu  
grafu  $G$



Je uvedený přístup, tj. zaměňování konkrétního grafu za celou jeho třídu isomorfismu, v matematice neobvyklý?  $\square$  Ne, například už v geometrii jste říkali „čtverec o straně 2“ či „jednotkový kruh“ a podobně, aniž jste měli na mysli konkrétní obrázek, nýbrž celou třídu všech těchto shodných objektů.

## Další grafové pojmy



**Definice:** Mějme libovolný graf  $G$ . □

- \* Podgrafu  $H \subseteq G$ , který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *kružnice v  $G$* .
- \* Speciálně říkáme *trojúhelník* kružnici délky 3. □
- \* Podgrafu  $H \subseteq G$ , který je isomorfní nějaké cestě, říkáme *cesta v  $G$* . □
- \* Podgrafu  $H \subseteq G$ , který je isomorfní nějakému úplnému grafu, říkáme *klika v  $G$* .
- \* Podmnožině vrcholů  $X \subseteq V(G)$ , mezi kterými nevedou v  $G$  vůbec žádné hrany, říkáme *nezávislá množina  $X$  v  $G$* . □
- \* Indukovanému podgrafu  $H \subseteq G$ , který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *indukovaná kružnice v  $G$* .

## 7.3 Souvislost grafů, komponenty

Důležitou globální vlastností grafů je **souvislost**, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu.  $\square$

**Lema 7.6.** *Mějme relaci  $\sim$  na množině vrcholů  $V(G)$  libovolného grafu  $G$  takovou, že pro dva vrcholy  $x \sim y$  právě když existuje v  $G$  cesta začínající v  $x$  a končící v  $y$ . Pak  $\sim$  je relací ekvivalence.  $\square$*

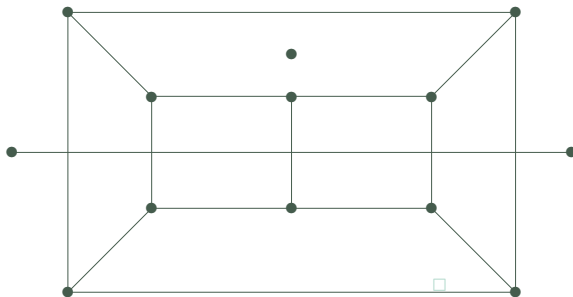
### Důkaz.

- Relace  $\sim$  je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou cestou délky 0.  $\square$
- Symetrická je také, protože cestu z  $x$  do  $y$  snadno v neorientovaném grafu obrátíme na cestu z  $y$  do  $x$ .  $\square$
- Pro důkaz tranzitivity si označme  $P$  cestu z  $x$  do  $y$  a  $Q$  cestu z  $y$  do  $z$ . Pak  $P \cup Q$  nemusí být cesta; mohou se navzájem protínat.  $\square$  Avšak pokud označíme  $P' \subseteq P$  část cesty z  $x$  do prvního vrcholu v průniku s  $Q$ , tak  $P' \cup Q$  už je cesta z  $x$  do  $z$ .  $\square$

**Definice 7.7. Komponentami souvislosti** grafu  $G$  nazveme třídy ekvivalence výše popsané (Lema 7.6) relace  $\sim$  na  $V(G)$ .  $\square$

Jinak se také **komponentami souvislosti** myslí **podgrafy** indukované na těchto třídách ekvivalence.  $\square$

Podívejte se, kolik komponent souvislosti má tento graf:

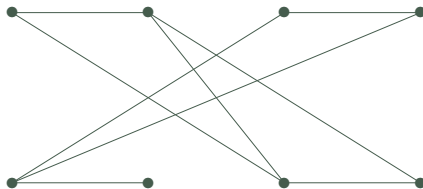
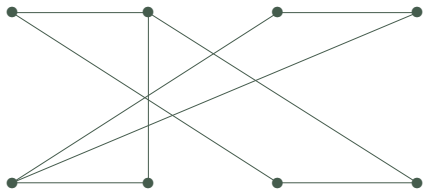


Vidíte v obrázku všechny tři komponenty? Jedna z nich je izolovaným vrcholem, druhá hranou (tj. grafem isomorfním  $K_2$ ) a třetí je to zbývající.

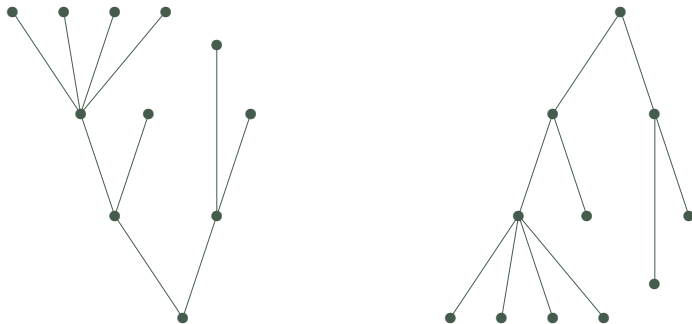
### Definice 7.8. Graf $G$ je souvislý

pokud je  $G$  tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy  $G$  jsou spojené cestou. □

Který z těchto dvou grafů je souvislý?



## 7.4 Stromy – grafy bez kružnic



Charakteristickými znaky stromů je absence kružnic a souvislost... □

**Definice 7.9. Strom** je jednoduchý souvislý graf  $T$  bez kružnic.

□

**Les** je jednoduchý graf bez kružnic (nemusí být souvislý). Komponenty souvislosti lesa jsou stromy. Jeden vrchol bez hran a prázdný graf jsou také stromy.

Grafy bez kružnic také obecně nazýváme *acyklické*.

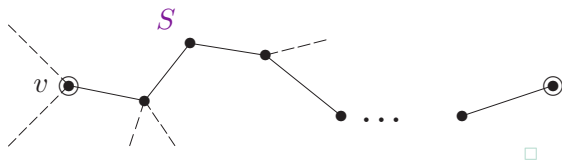


## Vlastnosti stromů

**Lema 7.10.** *Strom s více než jedním vrcholem obsahuje vrchol **stupně 1**.* □

**Důkaz:** Souvislý graf s více než jedním vrcholem nemůže mít vrchol **stupně 0**. Proto vezmeme strom  $T$  a v něm libovolný vrchol  $v$ . □ Sestrojíme nyní co nejdelší cestu  $S$  v  $T$  začínající ve  $v$ :

- \*  $S$  začne libovolnou hranou vycházející z  $v$ ; □
- \* v každém dalším vrcholu  $u$ , do kterého se dostaneme a má stupeň větší než 1, lze pak pokračovat cestu  $S$  další novou hranou.

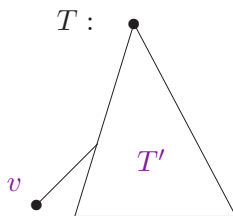


Pokud by se v  $S$  poprvé zopakoval některý vrchol, získali bychom **kružnici**. Proto cesta  $S$  musí jednou skončit v nějakém vrcholu **stupně 1** v  $T$ . □

**Věta 7.11.** *Strom na  $n$  vrcholech má přesně  $n - 1$  hran pro  $n \geq 1$ .  $\square$*

**Důkaz:** Toto tvrzení dokážeme indukcí podle  $n$ .

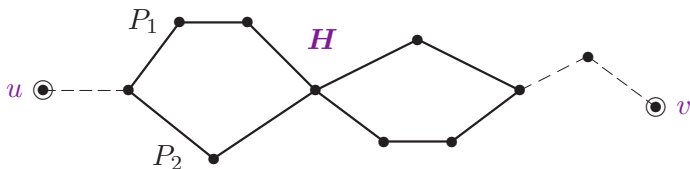
\* Strom s jedním vrcholem má  $n - 1 = 0$  hran.  $\square$



\* Necht'  $T$  je strom na  $n > 1$  vrcholech.

Podle Lematu 7.10 má  $T$  vrchol  $v$  stupně 1. Označme  $T' = T - v$  graf vzniklý z  $T$  odebráním vrcholu  $v$ .  $\square$  Pak  $T'$  je také souvislý bez kružnic, tudíž strom na  $n - 1$  vrcholech. Dle indukčního předpokladu  $T'$  má  $n - 1 - 1$  hran, a proto  $T$  má  $n - 1 - 1 + 1 = n - 1$  hran.  $\square$

**Věta 7.12.** Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě *jediná cesta*. □



**Důkaz:** Jelikož strom  $T$  je souvislý dle definice, mezi libovolnými dvěma vrcholy  $u, v$  vede nějaká cesta. □

Pokud by existovaly dvě různé cesty  $P_1, P_2$  mezi  $u, v$ , tak bychom vzali jejich symetrický rozdíl, podgraf  $H = P_1 \Delta P_2$  s neprázdnou množinou hran, kde  $H$  zřejmě má všechny stupně sudé. □ Na druhou stranu se však podgraf stromu musí opět skládat z komponent stromů, a tudíž obsahovat vrchol stupně 1 podle Lematu 7.10, spor. □

**Důsledek 7.13.** Přidáním jedné hrany do stromu vznikne právě *jedna kružnice*.

## Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

- **minimální souvislý** graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň **maximální acyklický** graf (plyne z Důsledku 7.13).

