FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I

ŘEŠENÍ cvičení 1.

1. Všechny jazyky jsou podmnožinou jazyka L_1. Dále platí:

   $\mathbf{L_1 = L_6}$**:** inkluze $L_6 \subseteq L_1$ je zřejmá. Ukážeme opačnou inkluzi, t.j. $L_1 \subseteq L_6$.
   Zřejmě prázdné slovo je prvkem obou jazyků. Každé neprázdné slovo $w \in L_1$ může být nazírano jako posloupnost, ve které se střídají skupiny symbolů a se skupinami symbolů b. Přesněji, slovo w můžeme zapsat jako $w = a^{i_1}b^{j_1}\ldots a^{i_n}b^{j_n}$, kde $i_1 \geq 0$; $j_1, i_2, \ldots, i_n > 0$; $j_n \geq 0$; $n \geq 1$ a $i_1 + j_n > 0$.
   Předpokládejme, že $j_n > 0$, tzn. slovo w končí skupinou symbolů b (případ $j_n = 0$ se řeší analogicky). Indukcí vzhledem k n prokážeme, že $w \in \{a^*b\}^*$.
   1°. $w = a^{i_1}b^{j_1} = a^{i_1}b\underbrace{a^0ba^0b\ldots a^0b}_{j_n-1}$. Proto $w \in \{a^*b\}^{j_n}$.
   2°. Podle indukčního předpokladu tvrzení platí pro n. Dokážeme jej pro $n+1$. Slovo w obsahující $n+1$ skupin symbolů b můžeme napsat jako zřetězení slov v_1 a v_2, kde $v_1 = a^{i_1}b^{j_1}\ldots a^{i_n}b^{j_n}$ a $v_2 = a^{i_{n+1}}b^{j_{n+1}}$. Podle IP obě slova patří do $\{a^*b\}^*$, a proto slovo w patří do $\{a^*b\}^*$.

   $\mathbf{L_2 \subset L_1}$**:** slovo $aa \notin L_2$ ale $aa \in L_1$.

   $\mathbf{L_3 \subset L_1}$**:** slovo $baab \notin L_3$ ale $baab \in L_1$.

   $\mathbf{L_4 \subset L_3}$**:** Jestli $w \in L_4$, pak z definice operace zřetězení jazyků plyne existence slov v_1, v_2, v_3 takových, že $v_1 = a$, $v_2 = a^i$ a $v_3 = b^j$ $(i, j \geq 0)$. Slova v_1v_2 a v_3 dokazují příslušnost slova w do L_3. Inkluze je ostrá, protože $\varepsilon \notin L_4$.

   $\mathbf{L_4 \subset L_5}$**:** Podobně jako v předcházejícím případě.; $v_1 \in \{a\}$ a $v_2v_3 \in \{a,b\}^*$. Inkluze je ostrá, protože slovo $ba \notin L_4$ ale $ba \in L_5$.

   $\mathbf{L_5 \subset L_1}$**:** slovo $bb \notin L_5$ ale $bb \in L_1$.

   Všechny zbývající dvojice jsou nesrovnatelné.

2. **a)** $X = \{00\}^* \cdot \{1000, 0100, 0010, 0001, 00\} \cdot \{00\}^*$.

   b) Označme $L = \{0,1\}^*$. Pak
   $Y = (L\{000\}L \cup L\{111\}L)^c \ \cap\ [\{1\}L\{1\} \cup \{0\}L\{0\} \cup \{0\} \cup \{1\}]$.

3. Buď $w \in (L_1 \cup L_2) \cdot L_3$. $\Longleftrightarrow$
   $w = u \cdot v$, kde $v \in L_3$ a $u \in L_1$ anebo $u \in L_2$. $\Longleftrightarrow$
   $u \cdot v \in L_1 \cdot L_3$ anebo $u \cdot v \in L_2 \cdot L_3$ $\Longleftrightarrow$
   $w \in (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$.

   Pro $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{aa\}$ a $L_3 = \{a, aa\}$ rovnost *b)* neplatí.

4. Buď $w \in (L_1 \cdot L_2)^+ \cdot L_1$ $\Longleftrightarrow$
   $w = uv$, kde $v \in L_1$ a $u \in (L_1 \cdot L_2)^+$ $\Longleftrightarrow$
   $w = uv$, kde $v \in L_1$ a $u = x_1y_1\ldots x_ny_n$, kde $x_i \in L_1$ a $y_i \in L_2$ pro $i = 1, \ldots, n$. $\Longleftrightarrow$
   $w = UV$, kde $U = x_1 \in L_1$ a $V = y_1x_2\cdots y_nv \in (L_2 \cdot L_1)^+$ $\Longleftrightarrow$
   $w \in L_1 \cdot (L_2 \cdot L_1)^+$.
   Rovnost $(L_1 \cdot L_2)^0 \cdot L_1 = L_1 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_1)^0$ je zřejmá.

   Pro $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ rovnost *b)* neplatí; slovo $ba \in (L_1 \cup L_2)^*$ ale $ba \notin L_1^*(L_1^* \cdot L_2)^*$

5. **a)** $h^{-1}(aabaaabaa) = \{ababc, abccbc, ccbabc, ccbccbc\}$.

   b) $h(L) = \{w \in \{a,b\}^* \mid \sharp_a(w) = 3\sharp_b(w);\ w$ neobsahuje podřetězec $bb\}$.

   c) $h^{-1}(L) = \{w \in \{a,c\}^* \mid \sharp_c(w)$ je sudý$\}$.