

Matematika III – 4. přednáška  
Funkce více proměnných: Taylorův polynom,  
extrémy funkcí

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

9. 10. 2013

# Obsah přednášky

- 1 Taylorův polynom
- 2 Lokální a absolutní extrémy funkcí více proměnných
  - Lokální extrémy
  - Absolutní (globální) extrémy
- 3 Implicitně definovaná zobrazení

## Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple*, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- Silvie Kuráňová, Jan Vondra, *Diferenciální počet funkcí více proměnných - interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*, PŘF MU, 2009, <http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps09/sbirka/web/index.html>
- *Předmětové záložky v IS MU*

# Taylorův polynom – připomenutí

## Definice

*Taylorovým polynomem* funkce  $f$  stupně  $m$  (se středem) v bodě  $x^*$  nazýváme polynom (více proměnných), který má s funkcí  $f$  stejnou funkční hodnotu v daném bodě  $x^*$  a stejnou hodnotu všech parciálních derivací až do řádu  $m$  včetně.

## Věta (Taylorova)

*Nechť má funkce  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  v bodě  $x^*$  a vhodném okolí spojitě parciální derivace až do řádu  $m + 1$ . Pak pro  $v = x - x^* \in \mathbb{R}^n$  platí:*

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x), \quad \text{kde}$$

$$T_m(x) = f(x^*) + df(x^*)(v) + \frac{1}{2!} d^2f(x^*)(v) + \cdots + \frac{1}{m!} d^m f(x^*)(v),$$

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1}f(x^* + \theta v)(v), \quad \text{pro vhodné } \theta \in (0, 1).$$

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných ( $x^* = [x_0, y_0]$ ):

*Tečná rovina:*  $f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

*Aproximace pomocí Hessiánu ( $d^2f = Hf$ ):*

$f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2} d^2f(x_0, y_0)f(x - x_0, y - y_0)$ .

*Výraz třetího řádu:*

$$d^3f(x, y)(\xi, \eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \xi^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \xi^2 \eta + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \xi \eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \eta^3$$

a obecně

$$d^k f(x, y)(\xi, \eta) = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-\ell} \partial y^\ell} \xi^{k-\ell} \eta^\ell.$$

# Příklady k procvičení

## Příklad

- a) Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$  v bodě  $[1, 1]$  a přibližně vypočtete hodnotu  $f(1,1; 1,2)$ .
- b) Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce  $f(x, y) = \sin x \operatorname{tg} y$  v bodě  $[30^\circ, 45^\circ]$  a přibližně vypočtete hodnotu  $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$ .

## Definice

Vnitřní bod  $x^* \in E_n$  definičního oboru funkce  $f$  je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí  $U$  takové, že pro všechny body  $x \in U$  platí  $f(x) \leq f(x^*)$  (resp.  $f(x) \geq f(x^*)$ ). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny  $x \neq x^*$ , hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Vnitřní bod  $x^* \in E_n$  definičního oboru funkce  $f$ , ve kterém je diferenciál  $df(x)$  nulový, nazýváme **stacionární bod funkce  $f$** .

Nutnou podmínkou pro existenci maxima nebo minima v bodě  $x^*$  (v případě diferencovatelnosti funkce  $f$  v  $x^*$ ) je **vymizení diferenciálu v tomto bodě, tj.  $df(x^*) = 0$** . Skutečně, pokud je  $df(x^*) \neq 0$ , pak existuje směr  $v$ , ve kterém je  $d_v f(x^*) \neq 0$ . Pak ovšem nutně podél přímky  $x^* + tv$  na jednu stranu od bodu  $x^*$  hodnota funkce roste a na druhou klesá.

### Příklad

Funkce  $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

má v počátku ostré lokální maximum (přitom zde není spojitá, a tedy ani diferencovatelná).

### Příklad

Funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  je v počátku spojitá a má zde ostré lokální minimum, přestože v tomto bodě není diferencovatelná (grafem funkce je kuželová plocha – viz první přednáška).



# Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.

Přitom ale (podobně jako u funkcí jedné proměnné) stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.

Např. funkce  $f(x, y) = (x - x_0)(y - y_0)$  má v bodě  $[x_0, y_0]$  stacionární bod ( $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (y - y_0)dx + (x - x_0)dy$ ), nemá zde však zřejmě lokální extrém (jde o tzv. „sedlo“).

Poznat, jakého typu je daný stacionární bod, nám stejně jako v případě funkcí jedné proměnné umožní (díky Taylorově větě) derivace vyšších řádů.

# Situace v jedné proměnné

Mějme funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a její stacionární bod  $x_0$  (tj.  $f'(x_0) = 0$ ).

Je-li  $f''(x_0) < 0$ , má funkce v  $x_0$  ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).

Toto tvrzení vyplynulo z Taylorovy věty (stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

kde  $\xi$  leží mezi  $x$  a  $x_0$ . Ze spojitosti  $f''$  a vlastnosti  $f''(x_0) < 0$  pak pro  $\xi$  dostatečně blízko  $x_0$  dostáváme  $f''(\xi) < 0$  a tedy  $R_1(x) < 0$  dostatečně blízko  $x_0$ . Proto zde  $f(x) < f(x_0)$  a  $x_0$  je lokálním maximem.

# Situace ve více proměnných

Mějme funkci  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  a její stacionární bod  $x^*$  (tj.  $f'(x^*) = \mathbf{0}$  – nulový vektor parciálních derivací).

Z Taylorovy věty pak dostáváme (opět stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x^*) + df(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2} d^2f(\xi)(x - x^*) = \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2} d^2f(\xi)(x - x^*), \end{aligned}$$

kde  $\xi = x^* + \theta v$  (pro  $\theta \in (0, 1)$ ) leží „mezi“  $x$  a  $x^*$ .

Zbývá do více proměnných přeložit podmínku, která říká, že výraz

$$d^2f(\xi)(x - x^*) = (x - x^*)^T Hf(\xi)(x - x^*)$$

je nekladný (resp. nezáporný) pro libovolné  $x$ .

# Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

## Definice

Kvadratická forma  $h : V \rightarrow \mathbb{R}$  je

- **pozitivně definitní**, je-li  $h(u) > 0$  pro všechny  $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li  $h(u) \geq 0$  pro všechny  $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li  $h(u) < 0$  pro všechny  $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li  $h(u) \leq 0$  pro všechny  $u \in V$
- **indefinitní**, je-li  $h(u) > 0$  a  $h(v) < 0$  pro vhodné  $u, v \in V$ .

Často rovněž hovoříme o definitnosti matice  $A$  kvadratické formy  $h$  (jsou spolu ve vztahu  $h(u) = u^T Au = Au \cdot u$ ).

S těmito pojmy jste se setkali již v části věnované lineárním modelům a měli byste tedy umět rozeznat definitnost kvadratické formy (resp. její matice v dané bázi).

# Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice  $A$  je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice  $A$  (tj. kořeny  $\lambda$  jejího charakteristického polynomu  $|A - \lambda I_n|$ ) jsou kladné,
- všechny hlavní minory  $A$  jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice  $A$  je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice  $A$  jsou záporné,
- hlavní minory  $A$  střídají znaménko, počínaje záporným.

## Věta

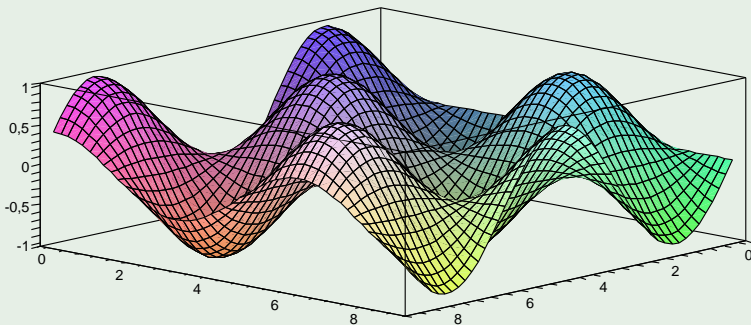
Nechť  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a  $x^* \in E_n$  nechť je stacionární bod funkce  $f$ . Potom

- 1 je-li  $Hf(x^*)$  pozitivně (negativně) definitní, má  $f$  v  $x^*$  ostré lokální minimum (maximum),
- 2 je-li  $Hf(x^*)$  indefinitní, nemá  $f$  v bodě  $x^*$  lokální extrém.
- 3 má-li  $f$  v  $x^*$  lokální minimum (maximum), je  $Hf(x^*)$  pozitivně (negativně) semidefinitní,

Všimněme si, že věta nedává žádný výsledek, pokud je hessián funkce ve zkoumaném bodě degenerovaný (nulový). Důvod je opět stejný jako u funkcí jedné proměnné. V takových případech totiž existují směry, ve kterých první i druhá derivace zmizí a my proto v tomto řádu přiblížení neumíme poznat, zda se funkce bude chovat jako  $t^3$  nebo jako  $\pm t^4$  dokud nespočteme alespoň v potřebných směrech derivace vyšší.

## Příklad

Uvažme funkci  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ , která připomíná známá kartonová plata na vajíčka a spočtěme její lokální extrémy.



## Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x, y) = \cos(x) \cos(y), \quad f_y(x, y) = -\sin(x) \sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

- ①  $\cos(x) = 0, \sin(y) = 0$ , tj.  $[x, y] = [\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi]$ , pro libovolné  $k, \ell \in \mathbb{Z}$
- ②  $\cos(y) = 0, \sin(x) = 0$ , tj.  $[x, y] = [k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi]$ , pro libovolné  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ .

Druhé parciální derivace jsou

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \cos(y) & -\cos(x) \sin(y) \\ -\cos(x) \sin(y) & -\sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$



## Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

- 1  $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , přičemž znaménko  $+$  nastává, když  $k$  a  $\ell$  jsou *různé* parity a naopak pro  $-$ ,
- 2  $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , přičemž znaménko  $+$  nastává, když  $k$  a  $\ell$  jsou *různé* parity a naopak pro  $-$ .

Protože naše funkce má spojitý hessián, který je nedegenerovaný, nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod  $(x^*, y^*)$  patří do první skupiny se stejnými paritami  $k$  a  $\ell$ . Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima. Naopak, hessián u druhé skupiny bodů se vyčíslí kladně na některých přírůstcích a záporně na jiných. Stejně se proto bude chovat i celá funkce  $f$  v okolí těchto stacionárních bodů.

## Příklad (Poznámky)

- matice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  je indefinitní, přestože má oba hlavní minory nekladné (pro semidefinitnost je znaménko minorů pouze nutnou podmínkou!)
- nalezené lokální extrémy šlo jistě najít snadněji úvahou o nabývání hodnot  $\pm 1$  funkcí  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ , neměli bychom ale jistotu, že jde o **všechny** extrémy.

# Příklady k procvičení

## Příklad

Určete stacionární body funkce

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$  a rozhodněte, které z těchto bodů jsou lokálními extrémy a jakého druhu.

# Absolutní extrémy

## Definice

Nechť  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  a  $M$  je podmnožinou definičního oboru  $f$ .  
V bodě  $x^*$  nabývá  $f$  absolutního (globálního) maxima (minima) na  $M$ , pokud je  $f(x^*) \geq f(x)$  ( $f(x^*) \leq f(x)$ ) pro všechna  $x \in M$ .

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

## Věta

*Nechť  $M \subseteq E_n$  je kompaktní množina,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá. Pak  $f$  nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř  $M$  nebo v některém hraničním bodě.*

Hledání absolutních extrémů funkce na množině tak máme převedeno na nalezení lokálních extrémů (což umíme) a vyšetření hraničních bodů. To je ale často komplikovanější záležitost, které se budeme více věnovat později v části o *vázaných extrémech*.

## Příklad

Nalezněte extrémy funkce  $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$  na množině  $M$ , která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou  $x + y - 4 = 0$ .

## Řešení

Jediným stacionárním bodem je  $[1, 1]$ , kde nastává absolutní maximum  $f(1, 1) = 1$ . Absolutní minimum  $-12$  nastává v hraničních bodech  $[4, 0]$  a  $[0, 4]$ .

# Věta o implicitní funkci – neformální připomenutí

Pokud máme zadánu funkci  $f(x)$  vzorcem  $y = f(x)$ , hovoříme o jejím *explicitním* zadání. Obecnějším zadáním funkce je rovnice  $F(x, y) = 0$ , kde závislá proměnná  $y$  představuje „neznámou“ funkci. Pokud tuto rovnici nelze (nebo to nepotřebujeme) vyřešit vzhledem k  $y$ , pak hovoříme o funkci zadané *implicitně*. Avšak i v tomto obecnějším případě budeme schopni vypočítat  $y'(x)$  (aniž bychom nutně znali explicitní vzorec pro  $y(x)$ ), a to pomocí pravidla pro derivaci složené funkce.

## Příklad

Rovnice  $y^2 = x$  definuje *dvě* diferencovatelné funkce proměnné  $x$ :

$$y_1 = \sqrt{x}, \quad y_2 = -\sqrt{x}$$

Při derivování implicitně zadaných funkcí obsahuje výsledná derivace  $y'$  jak proměnnou  $x$  tak proměnnou  $y$  (na rozdíl od *běžného* derivování funkce, kdy je ve výsledku pouze proměnná  $x$ ).

# Věta o implicitní funkci

Pro jednoduchost vyložíme ideu v rovině  $E_2$ :

Pro spojitě diferencovatelnou funkci  $F(x, y) : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  hledejme body  $[x, y]$ , ve kterých platí  $F(x, y) = 0$ . Příkladem může být třeba obvyklá (implicitní) definice přímk a kružnic:

$$F(x, y) = ax + by + c = 0$$

$$F(x, y) = (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \quad r > 0.$$

V prvním případě je (při  $b \neq 0$ ) předpisem zadaná funkce

$$y = f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

pro všechna  $x$ . Ve druhém případě umíme pouze pro  $[a, b]$  splňující rovnici kružnice a  $b \neq t$  najít okolí bodu  $a$ , na kterém nastane

$$y = f(x) = t + \sqrt{(x - s)^2 - r},$$

$$y = f(x) = t - \sqrt{(x - s)^2 - r}.$$

Body  $[s \pm r, t]$  také vyhovují rovnici kružnice, platí v nich ale  $F_y(s \pm r, t) = 0$ , což znamená, že tečna ke kružnici v těchto bodech je rovnoběžná s osou  $y$ . **V těchto bodech neumíme najít okolí, na němž by kružnice byla popsána jako funkce  $y = f(x)$ .**

Navíc umíme spočítat i **derivace**:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2(x-s)}{\sqrt{(x-s)^2 - r^2}} = \frac{x-s}{y-t} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Naopak, pokud budeme chtít najít závislost  $x = f(y)$  takovou, aby  $F(f(y), y) = 0$ , pak v okolí bodů  $(s \pm r, t)$  bez problémů uspějeme. Všimněme si, že v těchto bodech je parciální derivace  $F_x$  nenulová.



Shrňme pozorování (pro pouhé dva příklady):

Pro funkci  $F(x, y)$  a bod  $[a, b] \in E_2$  takový, že  $F(a, b) = 0$ , umíme najít funkci  $y = f(x)$  splňující  $F(x, f(x)) = 0$ , pokud je  $F_y(a, b) \neq 0$ . V takovém případě umíme i vypočítat  $f'(x) = -F_x/F_y$ . Z následující věty plyne, že takto to platí vždy, navíc rozšířené i na libovolné počty proměnných.

## Věta (O implicitní funkci)

*Nechť  $F : E_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce na otevřeném okolí bodu  $[x^*, y^*] \in E_n \times \mathbb{R}$ , ve kterém je  $F(x^*, y^*) = 0$  a  $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$ . Potom existuje spojitá funkce  $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná na nějakém okolí  $U$  bodu  $x^* \in E_n$  taková, že  $F(x, f(x)) = 0$  pro všechny  $x \in U$ .*

*Navíc má funkce  $f$  v okolí bodu  $x^*$  parciální derivace splňující*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

## Pomůcka

Poslední tvrzení o derivaci přitom je dobře zapamatovatelné (i pochopitelné) z výrazu pro diferenciál:

$$0 = dF = F_x dx + F_y dy = (F_x + F_y f'(x)) dx.$$

## Příklad

Určete lokální extrémy funkce  $z = f(x, y)$ , která je určena implicitně rovnicí  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz - 1 = 0$ .

## Řešení

Derivováním rovnosti podle  $x$  a  $y$  dostáváme:

$$2x + 2z \cdot z_x - z - x \cdot z_x - \sqrt{2}yz_x = 0$$

$$2y + 2z \cdot z_y - x \cdot z_y - \sqrt{2}z - \sqrt{2}yz_y = 0,$$

odkud vyjádříme

$$z_x = \frac{z - 2x}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_y = \frac{\sqrt{2}z - 2y}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

## Řešení (pokr.)

Stacionární body musí splňovat:  $z_x = 0$ ,  $z_y = 0$ , tj.  $z = 2x = \sqrt{2}y$ , a tedy  $y = \sqrt{2}x$ . Dosazením do původní rovnice dostáváme stacionární body  $[1, \sqrt{2}, 2]$  a  $[-1, -\sqrt{2}, -2]$ . V těchto bodech je  $F_z \neq 0$  (je to zároveň jmenovatel všech zde vystupujících zlomků), proto je v jejich okolí implicitně určena jistá funkce  $z = f(x, y)$ . Dalším derivováním implicitní rovnice vypočteme parciální derivace  $f$  2. řádu:

$$z_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Ve stacionárních bodech je  $Hf$  negativně, resp. pozitivně definitní, proto zde nastávají lokální maximum, resp. minimum funkce  $f$ .

Body, v nichž *není* danou rovnicí implicitně určena funkce  $z = f(x, y)$  jsou body roviny  $2z - x - \sqrt{2}y = 0$  (tedy body, v nichž během výpočtu dostaneme nulový jmenovatel některé z derivací).

# Příklady k procvičení

## Příklad

Ukažte, že funkce  $F(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x)$  definuje předpisem  $F(x, y) = 1$  pro  $[x, y] \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$  implicitně proměnnou  $y$  jako funkci  $f(x)$  proměnné  $x$ . Určete  $f'(x)$ .

## Příklad

Rozhodněte, zda křivka tvořená body vyhovujícími vztahu  $x^3 + y^3 - 2xy = 0$  leží v okolí bodu  $[1, 1]$  nad (nebo pod) svojí tečnou.