Matematické Základy Informatiky (FI: IB000)

Prof. RNDr. Petr Hliněný, Ph.D.

hlineny@fi.muni.cz

25. listopadu 2014

Obsažný a dobře přístupný úvod do nezbytných formálních matematických základů moderní informatiky, doplněný řadou interaktivních cvičení v IS MU.

Výukový text pro předmět IB000 na FI MU od roku 2012, navazující zčásti na původní výukové texty Úvodu do Informatiky z minulých let.

Verze 1.9991 (2014)
© 2006–2014 Petr Hliněný, FI MU.

0.1 O tomto textu a jeho studiu

Vážení čtenáři,

dostává se vám do rukou výukový text Matematické Základy Informatiky, který je primárně určený pro studenty stejnojmenného předmětu na FI MU Brno. Seznamuje čtenáře s několika formálními matematickými oblastmi důležitými pro úspěšné studium moderní informatiky.

Náš text svým obsahem volně navazuje na původní slidy předmětu IB000 sepsané A. Kučerou do roku 2005 a rozšířené autorem v letech 2006–11 o volný text a komentáře. Od roku 2012 však byl obsah některých pasáží podstatně změněn či přímo vyměněn za nový (nejzřetelnější je zahrnutí úvodu do grafů). Mimo textu samotného (jak jej zde vidíte) jsou z téhož zdoje vytvářeny i přednáškové slidy předmětu, které najdete například v IS MU. Slidy však pochopitelně obsahují jen část textu a jsou jinak formátovány.

Učební text je psán strukturovaným matematickým přístupem, s velkým důrazem na přesnost a formalitu vyjadřování v nutných partiích. Na druhou stranu jsou strohá matematická vyjádření pokud možno doplněna obsáhlými neformálními komentáři, které mají studentům ulehčit pochopení látky. V žádném případě však čtenáři nemají zaměňovat neformální komentáře za matematické definice – v případě nejasností vždy platí to, co přesně říká formální definice.

Interaktivní osnova

`http://is.muni.cz/el/1433/podzim2014/IB000/index.qwarp`

Nedílnou součástí celého výukového textu jsou interaktivní osnova předmětu IB000 v IS MU a z ní odkazované online odpovědníky sloužící k procvičování probrané látky na jednoduchých i složitějších příkladech. To je také důvod, proč tento text obsahuje jen poskrovnu řešených příkladů k probírané látce; od každého studenta očekáváme, že si látku *bude procvičovat online na zmíněných odpovědnících*, obsahujících až tisíce příkladů desítek typů. K praktickému pochopení přednesených znalostí i k jejich budoucím aplikacím je takové procvičení nezbytné(!). V návaznosti na tyto odpovědníky doporučujeme studentům diskutovat o probírané látce a svých (ne)úspěších s cvičícími předmětu i na předmětovém diskuzním fóru v IS.

Obsah

0.1 O tomto textu a jeho studiu ii

1 Základní formalismy matematiky **1**
1.1 Úvod do matematického dokazování 1
1.2 Význam matematických vět 2
1.3 Struktura matematických vět a důkazů 3
1.4 Výroky a základ logiky 5
1.5 Střípky matematické logiky 7

2 Důkazové techniky, Indukce **12**
2.1 Přehled základních důkazových technik 12
2.2 Věty typu „tehdy a jen tehdy“ 14
2.3 Matematická indukce 15
2.4 Komentáře k matematické indukci 17

3 Množiny, množinové operace **20**
3.1 Pojem množiny 20
3.2 Množinové operace 21
3.3 Porovnávání a určení množin 24
3.4 Posloupnosti a rekurentní vztahy 26

4 Relace a jejich použití **28**
4.1 Relace a funkce nad množinami 28
4.2 Reprezentace konečných relací 30
4.3 Vlastnosti binárních relací 31
4.4 Inverzní relace a skládání relací 33
4.5 Skládání relací „v praxi“ 34

5 Ekvivalence, Uspořádané množiny **37**
5.1 Relace ekvivalence 37
5.2 Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím 38
5.3 Uspořádání a uspořádané množiny 39
5.4 Další pojmy uspořádaných množin 41
5.5 Relace předuspořádání 44

6 Funkce a skládání, Induktivní definice **46**
6.1 Vlastnosti funkcí 46
6.2 Skládání funkcí, permutace 47
6.3 Induktivní definice množin a funkcí 49
6.4 Uzávěry relací 52

7 Pojem grafu, ve zkratce **55**
7.1 Definice grafu 55
7.2 Podgrafy a Isomorfismus 58
7.3 Souvislost grafů, komponenty 61
7.4 Stromy – grafy bez kružnic 63
7.5 Použití a implementace grafů 64

8 Procházení grafu a odvozené úlohy **67**
8.1 Jak obecně projít souvislý graf 67
8.2 Vzdálenost v grafu 70
8.3 Hledání nejkratší cesty 71
8.4 Problém minimální kostry 74

9 Orientované grafy, Toky v sítích **78**
9.1 Základní pojmy orientovaných grafů 78
9.2 Definice sítě a toku 80
9.3 Nalezení maximálního toku 82
9.4 Zobecněné použití sítí 86

10 Formalizace a důkazy pro algoritmy **89**
10.1 Formální popis algoritmu 89
10.2 O „správnosti“ a dokazování programů 91
10.3 Jednoduché indukční dokazování 92
10.4 Rekurzivní algoritmy 93

11 Pokročilé dokazování nad algoritmy **96**
11.1 Dokazování konečnosti algoritmu 96
11.2 Přehled technik důkazu indukcí 99
11.3 Zajímavé algoritmy aritmetiky 102
11.4 Dynamický algoritmus 104

12 Nekonečné množiny, Zastavení algoritmu **106**
12.1 O nekonečných množinách a kardinalitě 106
12.2 „Naivní“ množinové paradoxy 108
12.3 Algoritmická neřešitelnost problému zastavení 110

1 Základní formalismy matematiky

Úvod

Začněme nejprve několika obecnými poznámkami ke smyslu a směřování celého našeho předmětu: Jak sami poznáte, studium informatiky neznamená jen „naučit se nějaký programovací jazyk“, nýbrž zahrnuje celý soubor dalších relevantních předmětů, mezi nimiž najdeme i matematicko–teoretické (formální) základy moderní informatiky. Právě odborný nadhled nad celou informatikou včetně nezbytné formální teorie nejspíše odliší „řadového programátora“, kterých jsou dnes spousty i bez VŠ vzdělání, od skutečného a mnohem lépe placeného počítačového experta.

A na tomto místě nyní přichází náš předmět Matematické Základy Informatiky, který vás právě na studium těchto formálních základů moderní informatiky připraví. Výklad začínáme poněkud zostra – zdůrazněním přesného matematického vyjadřování, výrokovou logikou a principy logických úsudků a matematických důkazů. Nelekejte se však hned a s chutí se dejte do studia, nebude to až tak obtížné...

Cíle

Prvním cílem této lekce je rozebrat struktury matematických tvrzení (vět) a jejich formálních důkazů. V druhém sledu se naučíte chápat smysl matematických vět formálním pohledem výrokové logiky a pracovat s touto formalizací, včetně kvantifikace.

1.1 Úvod do matematického dokazování

Matematika (a tudíž i teoretická informatika jako její součást) se vyznačuje velmi přísnými formálními požadavky na korektnost argumentace. Takto korektně postavená argumentace vede od přijatých předpokladů v elementárních krocích směrem k požadovanému závěru (a nikdy ne naopak!).

Definice 1.1. ***Matematický důkaz*** .
Uvažme matematickou *větu* (neboli tvrzení) tvaru

„Jestliže platí *předpoklady*, pak platí *závěr*“.

Důkaz této věty je konečná posloupnost tvrzení, kde

- každé tvrzení je buď
  - *předpoklad*, nebo
  - obecně přijatá „pravda“ – *axiom*, nebo
  - plyne z předchozích a dříve dokázaných tvrzení podle nějakého „akceptovaného“ logického principu – *odvozovacího pravidla*;
- poslední tvrzení je *závěr*.

`Komentář:` O potřebné úrovni formality matematických důkazů a o běžných důkazových technikách se dozvíme dále v této a příští lekci. Nyní si jen celou problematiku uvedeme názornými příklady.

Příklad 1.2. *Uvažujme následující matematické tvrzení (které jistě už znáte).*

Věta. *Jestliže x je součtem dvou lichých čísel, pak x je sudé.*

`Poznámka` pro připomenutí:

- *Sudé* číslo je celé číslo dělitelné 2, tj. tvaru $2k$.
- *Liché* číslo je celé číslo nedělitelné 2, tj. tvaru $2k+1$.

`Důkaz` postupuje v následujících *formálních krocích*:

	tvrzení	zdůvodnění
1)	$a = 2k+1$, k celé	předpoklad
2)	$b = 2l+1$, l celé	předpoklad
3)	$x = a+b = 2k+2l+1+1$	1,2) a komutativita sčítání (axiom)
4)	$x = 2(k+l)+2\cdot 1$	3) a distributivnost násobení
5)	$x = 2(k+l+1)$	4) a opět distributivnost násobení
6)	$x = 2m$, m celé	5) a $m = k+l+1$ je celé číslo (axiom)

□

Příklad 1.3. *Dokažte následující tvrzení:*

Věta. *Jestliže x a y jsou racionální čísla pro která platí $x < y$, pak existuje racionální číslo z pro které platí $x < z < y$.*

`Důkaz` po krocích (s již trochu méně formálním zápisem) zní:

1) Nechť $z = \frac{x+y}{2} = x + \frac{y-x}{2} = y - \frac{y-x}{2}$.
2) Číslo z je racionální, neboť x a y jsou racionální.
3) Platí $z > x$, neboť $\frac{y-x}{2} > 0$.
4) Dále platí $z < y$, neboť opět $\frac{y-x}{2} > 0$.
5) Celkem $x < z < y$.

Jak čtenář vidí, tento strohý formální zápis (i když matematicky kompletní) si zaslouží aspoň krátký vysvětlující komentář. Takový komentář, ať už se objeví před nebo hned po formálních argumentech, sice není součástí důkazu samotného, velmi však napomáhá správnému pochopení a má své nezastupitelné místo. Konkrétně je zde velmi vhodné poznamenat, že klíčový krok (1) popisuje námi vymyšlenou algebraickou konstrukci, která vede k požadovanému číslu z. Zbylé kroky (2–5) pak jen snadno zdůvodňují, že nalezené z má všechny požadované vlastnosti. □

`Poznámka`. Alternativní formulace Věty z Příkladu 1.3 mohou znít:

- Pro každé $x, y \in \mathbb{Q}$, kde $x < y$, existuje $z \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < z < y$.
- Množina racionálních čísel je hustá.

1.2 Význam matematických vět

První krok formálního důkazu je uvědomit si, *co říká věta*, která se má dokázat; tedy co je *předpoklad* a co *závěr* dokazovaného tvrzení. *Pravdivost* takového tvrzení pak je třeba

chápat v následujícím významu:

Pro každou situaci, ve které jsou splněny všechny předpoklady,
je platný i závěr tvrzení.

`Komentář:` Příklady běžné formulace matematických *vět*:

* Konečná množina má konečně mnoho podmnožin.
* $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
* Graf je rovinný, jestliže neobsahuje podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

Co přesně nám uvedené matematické věty říkají? Často nám k lepšímu pochopení toho, co je tvrzeno a je třeba dokázat, pomůže pouhé rozepsání definic pojmů, které se v dané větě vyskytují.

O pravdivosti implikace

Všimněte si také, jaký je správný logický význam matematického tvrzení vysloveného touto formou *implikace* („jestliže ..., pak ...“). Především, pokud předpoklady nejsou splněny nebo jsou sporné, tak celé tvrzení je platné bez ohledu na pravdivost závěru!

Příklad 1.4. *Je pravdivé následující matematické tvrzení?*

> **Věta**. *Mějme dvě kuličky, červenou a modrou. Jestliže červená kulička je těžší než modrá a zároveň je modrá kulička těžší než ta červená, tak jsou obě kuličky ve skutečnosti zelené.*
>
> *„To přece nemůže být pravda, jak může být jedna kulička těžší než druhá a naopak zároveň? Jak mohou být nakonec obě zelené? To je celé nějaká blbost...“*

Ano, výše uvedené jsou typické laické reakce na uvedenou větu. Přesto však tato věta pravdivá je! Stačí se vrátit o kousek výše ke kritériu – *Pro každou situaci, ve které jsou splněny všechny předpoklady, je platný i závěr tvrzení* – které je zjevně naplněno. Nenaleznete totiž situaci, ve které by byly splněny oba předpoklady zároveň, a tudíž ve všech takových neexistujících situacích si můžete říkat cokoliv, třeba že kuličky jsou zelené. □

Příklad 1.5. *Anna a Klára přišly na přednášku a usadily se do lavic. Proč je pravdivé toto matematické tvrzení?*

> **Věta**. *Jestliže Anna sedí v první řadě lavic a zároveň Anna sedí v poslední řadě lavic, tak Klára nesedí v druhé řadě lavic.*

Opět je třeba se hluboce zamyslet nad *významem předpokladů a závěru*, ale tentokrát není situace předpokladů tak triviálně sporná, jako v Příkladu 1.4. Kdy tedy nastávají oba předpoklady zároveň? Když první řada lavic je zároveň řadou poslední! Neboli posluchárna má jen (nejvýše) jednu řadu lavic a Klára tudíž v druhé řadě nemůže sedět. Důkaz je hotov. □

1.3 Struktura matematických vět a důkazů

Jak „*moc formální*“ mají správné matematické důkazy vlastně být?

- Záleží na tom, komu je důkaz určen — *konzument* musí být schopen „snadno“ ověřit korektnost každého tvrzení v důkazu a plně pochopit, z čeho vyplývá.
- Je tedy hlavně na vás zvolit tu správnou úroveň formálnosti zápisu vět i důkazů podle situace.

A jak na ten správný matematický důkaz máme přijít?

- No…, nalézání matematických důkazů je tvůrčí činnost, která není vůbec snadná a vyžaduje od vás přímo „*umělecké*“ vlohy. Přesto se jí alespoň trochu musíte přiučit.

Dokazovat či vyvracet tvrzení?

Představme si, že našim úkolem je *rozhodnout platnost* matematického tvrzení. Jak matematicky správně zdůvodníme svou odpověď?

- Záleží na odpovědi samotné… Pokud je to ANO, prostě podáme důkaz tvrzení podle výše uvedených zvyklostí. Pokud je odpověď NE, tak naopak podáme důkaz *negace* daného tvrzení.

Poměrně častým případem pak je matematická věta T, která tvrdí nějaký závěr pro širokou oblast vstupních možností. Potom platí následující:

- Pokud T je pravdivá, nezbývá než podat *vyčerpávající důkaz* platnosti pro všechny vstupy.
- Avšak pokud T je nepravdivá, stačí „*uhodnout*“ vhodný vstupní *protipříklad* a jen pro něj dokázat, že závěr tvrzení není platný.

  `Komentář:` A nyní se znovu vraťte na začátek Oddílu 1.2 a srovnejte si výše uvedené se základními poznatky o významu matematických vět…

Příklad 1.6. *Rozhodněte platnost následujícího tvrzení: Pro všechna reálná x platí*

$$x^2 + 3x + 2 \geq 0\,.$$

`Důkaz`: Standardními algebraickými postupy si můžeme upravit vztah na $x^2+3x+2 = (x+1)\cdot(x+2) \geq 0$. Co nám z něj vyplývá? Například to, že k porušení daného tvrzení stačí volit x tak, aby jedna ze závorek byla kladná a druhá záporná. To nastane třeba pro $x = -\frac{3}{2}$.

Pro vyvrácení tvrzení nám tedy stačí začít volbou protipříkladu $x = -\frac{3}{2}$ (není nutno zdůvodňovat, jak jsme jej „uhodli“!) a následně dokázat úpravou

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)\cdot(x+2) = (-\frac{3}{2}+1)\cdot(-\frac{3}{2}+2) = (-\frac{1}{2})\cdot(+\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} < 0\,.$$

Dané tvrzení není platné. □

Konstruktivní a existenční důkazy

Z hlediska praktické využitelnosti je potřeba rozlišit tyto dvě kategorie důkazů (třebaže z formálně–matematického pohledu mezi nimi kvalitativní rozdíl není).

- Důkaz Věty 1.3 je *konstruktivní*. Dokázali jsme nejen, že číslo z existuje, ale podali jsme také návod, jak ho pro dané x a y *sestrojit*.

- *Existenční* důkaz je takový, kde se prokáže existence nějakého objektu *bez toho*, aby byl podán použitelný návod na jeho konstrukci.

Příklad 1.7. *čistě* existenčního *důkazu.*

Věta. *Existuje program, který vypíše na obrazovku čísla tažená ve 45. tahu sportky v roce 2014.*

Důkaz: Existuje pouze konečně mnoho možných výsledků losování 45. tahu sportky v roce 2014. Pro každý možný výsledek existuje program, který tento daný výsledek vypíše na obrazovku. Mezi těmito programy je tedy jistě ten, který vypíše právě ten výsledek, který bude ve 45. tahu sportky v roce 2014 skutečně vylosován.

□

Komentář: To je ale „*podvod*“, že? A přece *není*... Formálně správně to je prostě tak a tečka (2011: tedy dokud nám to pan Hušák všechno nepokazí, že?).

Fakt. Pro informatické i další aplikované disciplíny *je důležitá konstruktivnost* důkazů vět, které se zde objevují. V matematice ale jsou mnohé příklady užitečných a nenahraditelných existenčních důkazů, třeba tzv. *pravděpodobnostní důkazy.*

Příklad 1.8. *„pravděpodobnostního“ existenčního důkazu.*

Věta. *Na dané množině bodů je zvoleno libovolně n^2 podmnožin, každá o n prvcích. Dokažte pro dostatečně velká n, že všechny body lze obarvit dvěma barvami tak, aby žádná množina nebyla jednobarevná.*

Důkaz: U každého bodu si „*hodíme mincí*“ a podle výsledku zvolíme barvu červeně nebo modře. (Nezávislé volby s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.) Pravděpodobnost, že zvolených n bodů vyjde jednobarevných, je jen $\frac{2}{2^n} = 2^{1-n}$.

Pro n^2 podmnožin tak je pravděpodobnost, že některá z nich vyjde jednobarevná, shora ohraničená součtem

$$\underbrace{2^{1-n} + \cdots + 2^{1-n}}_{n^2} = \frac{n^2}{2^{n-1}} \to 0\,.$$

Jelikož je toto číslo (pravděpodobnost) pro $n \geq 7$ menší než 1, bude existovat obarvení bez jednobarevných zvolených podmnožin. □

1.4 Výroky a základ logiky

Pojem výroku se dá považovat za důležitý „*pevný most*“ mezi běžnou mluvou a přesným matematickým formalismem. Jeho správné uchopení napomůže chápání významu matematických výroků a práci s nimi (jako třeba v případě mechanické negace složeného výroku).

Definice 1.9. ***Výrok*** v přirozené mluvě:
V běžné mluvě za *výrok* považujeme (každé) tvrzení, o kterém má smysl platně prohlásit, že je *buď* pravdivé *nebo* nepravdivé.

Komentář: Ukážeme si několik příkladů – které z nich jsou výroky?

* Dnes už v Brně pršelo.
* Předmět FI: IB000 se vyučuje v prvním ročníku.
* Platí $2 + 3 = 6$.

* To je bez problémů. *(Co?)*
* Platí $x > 3$.
* Pro každé celé číslo x platí, že $x > 3$.

Všimněte si, že pravdivost výroku by mělo být možné rozhodnout bez skrytých souvislostí (kontextu), a proto čtvrtý a pátý příklad za výroky nepovažujeme. Poslední příklad již zase výrokem je, neboť obor hodnot x je jednoznačně vymezen tzv. kvantifikací.

Z více jednoduchých výroků vytváříme výroky složitější pomocí tzv. *logických spojek*.

`Komentář:` Následuje několik dalších příkladů.

* Množina $\{a, b\}$ má více než jeden prvek a není nekonečná.
* Jestliže má Karel přes 90 kg váhy, nejedu s ním výtahem.
* Jestliže má tato kráva 10 nohou, pak mají všechny domy modrou střechu.

Zastavme se na chvíli nad posledním výrokem. Co nám říká? Je pravdivý? Skutečně mají všechny domy modrou střechu a před námi stojí kráva s 10 nohama? (Ano, výrok je pravdivý, viz definice či pravdivostní tabulka implikace.)

Schopnost porozumět podobným větám je součást lidského způsobu uvažování a z tohoto hlediska nemá přímou souvislost s matematikou (je to „*přirozená logika*“). *Formální (matematická) logika* pak v podobném duchu definuje jazyk matematiky a přitom odstraňuje nejednoznačnosti přirozeného jazyka.

Ukázka formální práce s výroky

Pro příklad důležitosti matematické formalizace slovních výroků si rozebereme následující logickou „hádanku“, navazující na téma Příkladu 1.5.

Příklad 1.10. *Mějme trojici studentů X, Y, Z sedících v posluchárně na přednášce IB000 takových, že pro ně platí:*

a) X sedí v první řadě,

b) Y sedí v řadě hned za X,

c) Z sedí ve stejné řadě jako Y,

d) Z sedí ve druhé řadě.

Věta. *Jestliže zároveň platí (a),(b),(c),(d), pak student Z sedí ve druhé řadě.*

Tvrzení je samozřejmě triviální díky předpokladu (d), avšak úkolem je zjistit, jaké všechny minimální výběry z předpokladů (a),(b),(c),(d) ještě zajistí platnost uvedeného tvrzení.

Pro začátek osvětlíme (blíže viz Oddíl 5.4) význam slova *minimální*, kdy je myšlen výběr předpokladů takový, že odebráním libovolného z nich již platnost uvedeného tvrzení „Z sedí ve druhé řadě“ bude porušena.

Okamžitou odpovědí je samotný předpoklad (d), který je zřejmě minimální (bez předpokladů si může Z sednout i do první řady) a dostačující. Je to však úplná odpověď, nebo lze vybrat i jiné minimální předpoklady? Ano, ještě lze vybírat jinak – po vynechání (d) stále postačuje kombinace předpokladů (a),(b),(c) k vyslovení závěru „Z sedí ve druhé řadě“ (je to jasné?). Na druhou stranu, pokud kterýkoliv z (a),(b),(c) vynecháme, rozebráním těchto tří možností najdeme platná rozesazení, při kterých Z v druhé řadě nebude, takže se opět jedná o výběr minimální. Například pokud vynecháme (b), může Y sedět v první řadě spolu s X a stejně tak Z. Dořešte si sami zbylé dvě možnosti.

Pozor, ještě k úplnému vyřešení úlohy zbývá poslední důležitý krok – zdůvodnit, proč žádný jiný minimální výběr předpokladů úloze nevyhovuje. Zde je třeba rozebrat možnosti: Pokud náš hypotetický jiný výběr předpokladů obsahuje (d), pak nebude minimální, neboť lze odebrat cokoliv jiného, pokud (d) zůstane. Naopak výběr neobsahující (d) musí podle výše uvedeného obsahovat všechny (a),(b),(c), neboť jinak není dostačující. A tím jsme hotovi; všechny minimální výběry řešící úlohu jsou dva, (a),(b),(c) a samotné (d). □

1.5 Střípky matematické logiky

Všimněte si, že podle Definice 1.9 každému výroku běžné mluvy prostě můžeme *přiřadit logickou hodnotu* 0 (*false*) nebo 1 (*true*) a dále se nestarat o jazykový význam... Proto (jazykové) výroky v matematice vyjádříme *výrokovými proměnnými*, které značíme velkými písmeny $A, B, C, \ldots$ a přiřadíme jim hodnotu 0 nebo 1.

`Definice`: *Výroková formule* (značíme $\varphi, \sigma, \psi, \ldots$) vzniká z výrokových proměnných pomocí *závorek* a logických spojek $\neg$ *negace* a $\Rightarrow$ *implikace*. Zároveň používáme v zápise následujících zkratek

* $\varphi \vee \psi$ (*disjunkce* / „nebo“) je jiný zápis formule $\neg\varphi \Rightarrow \psi$,
* $\varphi \wedge \psi$ (*konjunkce* / „a“) je jiný zápis formule $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
* $\varphi \Leftrightarrow \psi$ (*ekvivalence*) je jiný zápis formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$.

`Poznámka`: Uvedená definice je instancí tzv. *induktivní definice*, jíž se budeme blíže věnovat v Oddíle 6.3, a proto ji zde uvádíme jen v hodně zjednodušené podobě.

`Komentář:` Při zápise výrokových formulí je potřeba dávat pozor na správné závorkování, aby formule měla jednoznačný význam. Na intuitivní úrovni to ilustrujeme takto:

Správně $A, \quad (A) \Rightarrow (B), \quad A \Rightarrow B, \quad \neg A \Rightarrow B, \quad A \vee B \vee \neg C$

a nesprávně $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ — znamená to $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ nebo $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$?

Matematický význam logickým formulím pak dodává následující definice.

Definice 1.11. ***Sémantika*** (význam) výrokové logiky.
Nechť *valuace* (ohodnocení) je funkce $\nu : Prom \to \{0,1\}$ na všech (dotčených) výrokových proměnných. Pro každou valuaci ν definujeme funkci $\mathcal{S}_\nu(\sigma)$, *vyhodnocení* formule σ, induktivně (tj. po krocích) takto:

* $\mathcal{S}_\nu(A) = \nu(A)$ pro každé $A \in Prom$.
* $\mathcal{S}_\nu(\neg\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$
* $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Rightarrow \psi) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1 \text{ a } \mathcal{S}_\nu(\psi) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$

`Poznámka`: Tento předpis podává nejen *definici* funkce $\mathcal{S}_\nu$, ale také návod na to, jak ji pro daný argument *vypočítat*.

Pro odvozené logické spojky disjunkce, konjunkce a ekvivalence pak dostaneme následující zcela přirozený výsledek (který tak potvrzuje, že jsme definici sémantiky zvolili správně).

Tvrzení 1.12. *Důsledkem Definice 1.11 je následovné:*

* $\mathcal{S}_\nu(\varphi \vee \psi) = 1$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$ nebo $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 1$.
* $\mathcal{S}_\nu(\varphi \wedge \psi) = 1$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 1$.
* $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ právě když platí jedna z následujících podmínek
  - $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 1$,
  - $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 0$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 0$.

Pravdivostní tabulky

V praxi často vyhodnocení $\mathcal{S}_\nu$ logické výrokové formule zapisujeme do tzv. *pravdivostní tabulky*. Tato tabulka typicky má sloupce pro jednotlivé proměnné, případné „meziformule“ (pomůcka pro snazší vyplnění) a výslednou formuli. Řádků je 2^p (počet valuací), kde p je počet použitých proměnných.

Pro naše účely postačí uvést pravdivostní tabulku instruktážním příkladem. Čtenáři nechť si vyplní podle Definice 1.11 vlastní pravdivostní tabulky dalších výrokových formulí, viz také příslušné cvičící odpovědníky v IS MU.

Příklad 1.13. *Jaká je pravdivostní tabulka pro formuli* $(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$*?*

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

□

Splnitelnost formulí a tautologie

`Definice`: Formule $\varphi \in \Phi$ je *splnitelná*, pokud pro <u>některou</u> valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$. Formule je nesplnitelná (říká se také *kontradikce*), pokud není splnitelná. Formule $\varphi \in \Phi$ je vždy pravdivá, neboli výroková *tautologie*, psáno $\models \varphi$, pokud pro <u>každou</u> valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$.

Řekneme, že dvě formule $\varphi, \psi \in \Phi$ jsou *ekvivalentní*, právě když $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$.

Tvrzení 1.14. *Následující formule jsou tautologiemi:*

* $\models A \vee \neg A$
* $\models \neg\neg A \Leftrightarrow A$
* $\models (A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
* $\models (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
* $\models (\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow A$

`Komentář:` Jak poznáme tautologii v pravdivostní tabulce?

Kvantifikace a predikátová logika

Výše popsaná výroková logika je velmi omezená faktem, že každý výrok musí být („absolutně“) vyhodnocen jako pravda nebo nepravda. Co když však chceme zpracovat tvrzení typu „den D v Brně pršelo“? Jeho pravdivostní hodnota přece závisí na tom, co dosadíme za den D, a tudíž jej nelze považovat za výrok výrokové logiky.

- Predikátová logika pracuje s *predikáty*. Predikáty jsou „*parametrizované výroky*“, které jsou buď pravdivé nebo nepravdivé pro každou konkrétní volbu parametrů. Výrokové proměnné lze chápat jako predikáty bez parametrů.
- *Predikátová logika* je tak *obecnější než logika výroková*; každá formule výrokové logiky je i formulí predikátové logiky, ale ne obráceně.

  `Komentář:` Pro neformální přiblížení si uvedeme několik ukázek predikátů:
  - $x > 3$ (parametrem je zde $x \in \mathbb{R}$),
  - čísla x a y jsou nesoudělná (parametry $x, y \in \mathbb{N}$),
  - obecně jsou predikáty psány $P(x, y)$, kde x, y jsou libovolné parametry.

`Definice`: Z predikátů lze vytvářet *predikátové formule* pomocí už známých (viz Definice 1.11) výrokových spojek a následujících tzv. *kvantifikátorů*:

- $\forall x \,.\, \varphi$ „pro *každou* volbu parametru x platí formule φ“,
- $\exists x \,.\, \varphi$ „*existuje* alespoň jedna volba parametru x, pro kterou platí φ“.

  `Komentář:` Pozorného čtenáře napadne, ze které množiny že „volíme parametr x“? To je v matematické logice obvykle implicitní (řečeno mimo samotnou formuli) a platí pro všechny kvantifikátory formule stejně. Může to být sice trochu v rozporu s tím, co jste se možná učili dříve, ale má to dobré formální důvody.

Čtenář by měl v tomto místě vzít na vědomí, že naše definice vztahující se k predikátové logice jsou velmi zjednodušené a nenahrazují kurz matematické logiky! Přesto poskytnou alespoň základní povědomí o této problematice (a hlavně o použití kvantifikace v tvrzeních) pro potřeby matematické formalizace v našem kurzu.

`Fakt`: Je-li *každá* proměnná – parametr predikátu – v dané formuli kvantifikovaná (tj. formule je *uzavřená*), pak je celá formule buď pravdivá nebo nepravdivá.

Příklad 1.15. *Ukažme si vyjádření následujících slovních výroků v predikátové logice:*

- Každé prvočíslo větší než 2 je liché;

  $$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \big[(Pr(n) \wedge n{>}2) \;\Rightarrow\; Li(n)\big],$$

  přičemž lze rozepsat $Li(n) \equiv \exists k \in \mathbb{N} \,.\, n = 2k + 1$.
- Každé číslo $n > 1$, které není prvočíslem, je dělitelné nějakým číslem y kde $n \neq y$ a $y > 1$;

  $$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \big(n > 1 \wedge \neg Pr(n)\big) \Rightarrow\; \exists y\big(y|\, n \wedge n{\neq}y \wedge y{>}1\big).$$

□

`Poznámka`: Pozor, v tomto předmětu počítáme 0 *za přirozené číslo*!

Příklad 1.16. *Dále si ukažme, že na pořadí kvantifikátorů velmi záleží:*

- Pro každého studenta A v posluchárně platí, že existuje student B v posluchárně takový, že A je kamarád B.
- Existuje student B v posluchárně, že pro každého studenta A v posluchárně platí, že A je kamarád B.

Vidíte propastný rozdíl ve významech uvedených dvou uzavřených predikátových formulí? □

Mechanický postup negace výroků

Závěrem lekce se dostáváme k jednomu specifickému úskalí lidského chápání, totiž že přesný význam formulí se zanořenými negacemi je někdy skutečně obtížné zjistit (podobně jako v běžné řeči).

„Není pravda, že nemohu neříct, že není pravda, že tě nemám nerad."

Výrokové formule se proto obvykle prezentují v tzv. normálním tvaru, kde se negace vyskytují pouze u výrokových proměnných, formálně:

`Definice`: Formule $\varphi \in \Phi$ je v *normálním tvaru*, pokud se v ní operátor negace aplikuje pouze na výrokové proměnné.

`Komentář:` Například, pokud přijmeme pravidlo „dvojí negace" ($\models \neg\neg A \Leftrightarrow A$), tak výše napsanou větu si převedeme na lépe srozumitelný tvar:

„Nemusím říct, že tě mám nerad."

Tvrzení 1.17. *Každou výrokovou formuli lze převést do normálního tvaru, pokud k $\Rightarrow$ povolíme i užívání odvozených spojek $\wedge$ a $\vee$.*

`Komentář:` Pro ilustraci k $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní $A \wedge \neg B$, k $\neg\big(C \wedge (\neg A \Rightarrow B)\big)$ je ekvivalentní $\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B)$ a k $\neg\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow C\big)$ je ekvivalentní $(A \Rightarrow B) \wedge \neg C$).

Metoda 1.18. ***Převod formule φ do normálního tvaru $\mathcal{F}(\varphi)$.***
Pro převod použijeme funktory $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ s neformálním významem $\mathcal{F}(X)$ jako „je pravda, že X" a $\mathcal{G}(X)$ jako „není pravda, že X". Tyto funktory definujeme induktivními předpisy následovně:

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathcal{F}(A) & = & A & \mathcal{G}(A) & = & \neg A \\
\mathcal{F}(\neg\varphi) & = & \mathcal{G}(\varphi) & \mathcal{G}(\neg\varphi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\varphi \Rightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \Rightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Rightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathcal{G}(\varphi) \vee \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \vee \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \vee \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \vee \psi) & = & \mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = & (\mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi)) \vee (\mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi))
\end{array}$$

Pro predikátové formule toto rozšíříme ještě o pravidla:

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathcal{F}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{G}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{G}(\varphi)
\end{array}$$

`Komentář:` Uvažme formuli $\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))$. Užitím uvedeného postupu 1.18 získáme:

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{F}(\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))) & = & \mathcal{G}(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = \\ \mathcal{F}(A) \wedge \mathcal{G}(\neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = & A \wedge \mathcal{F}(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)) & = \\ A \wedge (\mathcal{F}(B) \vee \mathcal{F}(\neg(C \Rightarrow \neg A))) & = & A \wedge (B \vee \mathcal{G}(C \Rightarrow \neg A)) & = \\ A \wedge (B \vee (\mathcal{F}(C) \wedge \mathcal{G}(\neg A))) & = & A \wedge (B \vee (C \wedge \mathcal{F}(A))) & = \\ A \wedge (B \vee (C \wedge A)) & & & \end{array}$$

Formuli $A \wedge (B \vee (C \wedge A))$ lze dále zjednodušit na (ekvivalentní) formuli $A \wedge (B \vee C)$. To ale je již z našeho pohledu matematicky neformální (heuristický) postup.

Uvedené formální předpisy takto vyjadřují *intuitivní postup převodu* $\mathcal{F}(\varphi)$ do „lidsky čitelného tvaru“.

Navazující studium

Látka této úvodní lekce má velmi široký záběr. S potřebou formálního zápisu tvrzení a důkazů se setkáte nejen v tomto, ale i ve všech dalších matematických předmětech, které zároveň studujete či budete studovat, a principy budou stále stejné. Proto se je snažte pochopit a zažít už na zde uvedených jednoduchých příkladech a vše si procvičte. A pokud vám stále „jde hlava kolem“ z logického matematického vyjadřování, můžete se také zkusit podívat na hezkou úvodní (středoškolskou) knížku Antonína Sochora – Logika pro všechny ochotné myslet, Karolinum 2011.

Na druhou stranu je matematická logika v této lekci uvedena jen velmi omezeně na nejlehčí akceptovatelné intuitivní úrovni a její další rozvoj je ponechán samostatným kurzům. Na FI MU to bude navazující předmět IB101 Úvod do logiky. Zájemce o studium matematických hlubin logiky a třeba slavných Gödelových poznatků můžeme později odkázat na předmět MA007 Matematická logika.

2 Důkazové techniky, Indukce

Úvod

Náš hlubší úvod do matematických formalismů pro informatiku pokračujeme základním přehledem technik matematických důkazů. Třebaže matematické dokazování a příslušné techniky mohou někomu připadat neprůhledné (a možná zbytečné), jejich pochopení a zvládnutí není samoúčelné, neboť nám pomáhá si mnoho uvědomit o studovaných problémech samotných. Konečně, jak si můžeme být jisti svými poznatky, když bychom pro ně nebyli schopni poskytnout důkazy?

Během studia tohoto předmětu poznáte (a ti méně šťastní až s překvapením u zkoušek), že podstata toho, k čemu naším výkladem směřujeme, se dá neformálně shrnout slovy „naučit se přesně vyjadřovat a být si svými tvrzeními naprosto jisti“ a analogicky později „naučit se navrhovat správné algoritmy a být si i svými programy naprosto jisti“.

Z důkazových postupů je pro informatiky asi nejdůležitější technika důkazů matematickou indukcí*, která je svou podstatou velmi blízká počítačovým programům (coby iterace cyklů). V dalším výkladu budeme indukci hojně využívat, především v Lekcích 10 a 11.*

Cíle

Cílem této lekce je popsat základní techniky matematických důkazů, z nichž největší důraz klademe na matematickou indukci. Každý student by se měl alespoň naučit formálně psané důkazy číst a pochopit. (Pro vysvětlení, z Lekce 1 víme, že matematický důkaz má „jednotnou formu“ Definice 1.1, ale nyní se věnujeme takříkajíc šablonám, podle nichž takový korektní důkaz sestavíme.)

2.1 Přehled základních důkazových technik

V matematice je často používaných několik následujících způsobů – technik, jak k danému tvrzení nalézt korektní formální důkaz. (Uvědomme si, že jedno tvrzení mívá mnoho různých, stejně korektních, důkazů; ty se však mohou výrazně lišit svou složitostí.) Tyto techniky si v bodech shrneme zde:

- *Přímé odvození.* To je způsob, o kterém jsme se dosud bavili.
  Postupujeme přímo od předpokladů k závěru, ale sami poznáte, že taková „přímá“ cesta je obtížně k nalezení.

- *Kontrapozice* (také *obrácením* či *nepřímý důkaz*). Místo věty

  „Jestliže platí *předpoklady*, pak platí *závěr*.“

  budeme dokazovat ekvivalentní větu

  „Jestliže neplatí *závěr*, pak neplatí alespoň jeden z *předpokladů*.“

- *Důkaz sporem.* Místo věty

  „Jestliže platí *předpoklady*, pak platí *závěr*.“

  budeme dokazovat větu

  „Jestliže platí *předpoklady* a platí *opak závěru*, pak platí“

  – nějaké *zjevně nepravdivé tvrzení*, nebo případně
  – opak závěru či opak jednoho z předpokladů.

- *Matematická indukce.* Pokročilá technika, kterou popíšeme později...

Tyto techniky jsou asi nejlépe ilustrovány následovnými příklady důkazů.

Příklad důkazu kontrapozicí

`Definice`: *Prvočíslo* je celé číslo $p > 1$ a nemá jiné dělitele než 1 a p.

Příklad 2.1. *Na důkaz kontrapozicí (obrácením).*

Věta. *Jestliže p je prvočíslo větší než 2, pak p je liché.*

`Důkaz`: *Obráceného tvrzení* – budeme tedy dokazovat, že

je-li p sudé, pak p buď není větší než 2, nebo p není prvočíslo.

Připomínáme, že podle definice je p sudé, právě když lze psát $p = 2 \cdot k$, kde k je celé. Jsou dvě možnosti:

- $k \leq 1$. Pak $p = 2k$ není větší než 2.
- $k > 1$. Pak $p = 2 \cdot k$ není prvočíslo podle definice. □

`Poznámka`: Důkazy kontrapozicí pracují s *negací* (opakem) *předpokladů* a *závěru*. Je-li např. závěrem komplikované tvrzení tvaru

„z toho, že z A a B plyne C, vyplývá, že z A nebo C plyne A a B“,

není pouhou intuicí snadné zjistit, co je vlastně jeho negací. Proto se nebojte využívat snadného *mechanického postupu* Metody 1.18 ke správnému „znegování“ do normálního tvaru.

Příklady důkazu sporem

Příklad 2.2. *Jiný přístup k Důkazu 2.1.*

Věta. *Jestliže p je prvočíslo větší než 2, pak p je liché.*

`Důkaz` *sporem*: Nechť tedy p je prvočíslo větší než 2, které je sudé. Pak $p = 2 \cdot k$ pro nějaké $k > 1$, tedy p není prvočíslo, spor (s předpokladem, že p je prvočíslo). □

Důkaz *sporem* je natolik specifický a důležitý v matematice, že si zaslouží širší vysvětlení. Co je vlastně jeho podstatou? Je to (zcela přirozený) předpoklad, že v *konzistentní teorii* nelze zároveň odvodit tvrzení i jeho negaci. Jestliže tedy ve schématu

> „Jestliže platí *předpoklady* a platí *opak závěru*, pak platí opak jednoho z *předpokladů*, nebo platí jiné *zjevně nepravdivé tvrzení*.“

odvodíme k některému předpokladu jeho spor, nebo případně jiné tvrzení, které odporuje všeobecně přijatým faktům (přesněji axiomům, například $0 = 1$), pak něco musí být „špatně“. Co však v našem tvrzení může (nezapomeňte předpoklad konzistence) být chybné? Původní předpoklady byly dány, takže zbývá jedině náš dodatečný předpoklad, že platí *opak závěru*. Tudíž opak závěru nemůže nikdy platit a dvojí negací odvodíme, že platí původní závěr.

Příklad 2.3. *Opět sporem.*

Věta. *Číslo $\sqrt{2}$ není racionální.*

`Důkaz` *sporem*: Nechť tedy $\sqrt{2}$ je racionální, tj. nechť existují nesoudělná celá kladná čísla r, s taková, že $\sqrt{2} = r/s$.

– Pak $2 = r^2/s^2$, tedy $r^2 = 2 \cdot s^2$, proto r^2 je dělitelné dvěma. Z toho plyne, že i r je dělitelné dvěma (proč? opět na to můžete jít sporem...).

– Jelikož r je dělitelné dvěma, je r^2 dělitelné dokonce čtyřmi, tedy $r^2 = 4 \cdot m$ pro nějaké m. Pak ale také $4 \cdot m = 2 \cdot s^2$, tedy $2 \cdot m = s^2$ a proto s^2 je dělitelné dvěma.

– Z toho plyne, že s je také dělitelné dvěma. Celkem dostáváme, že r i s jsou dělitelné dvěma, jsou tedy soudělná a to je spor (s definicí racionálního čísla). □

`Komentář:` „Nevíte-li, jak nějakou větu dokázat, zkuste důkaz sporem...“

2.2 Věty typu „tehdy a jen tehdy“

Uvažujme nyní (v matematice poměrně hojné) *věty* tvaru

> „Nechť platí *předpoklady P*. Pak *tvrzení A* platí *tehdy a jen tehdy*, platí-li *tvrzení B*.“

Příklady jiných jazykových formulací téže věty jsou:

* Za předpokladů P je tvrzení B *nutnou a postačující* podmínkou pro platnost tvrzení A.
* Za předpokladů P je tvrzení A nutnou a postačující podmínkou pro platnost tvrzení B.
* Nechť platí předpoklady P. Pak tvrzení A platí *právě tehdy* když platí tvrzení B.

`Fakt`: *Důkaz* vět tohoto tvaru má vždy *dvě části(!)*. Je třeba dokázat:

* Jestliže platí předpoklady P a tvrzení A, pak platí tvrzení B.
* Jestliže platí předpoklady P a tvrzení B, pak platí tvrzení A.

Příklad 2.4. *Na důkaz typu „tehdy a jen tehdy“.*

> **Věta**. *Dokažte, že pro každá dvě celá čísla a, b platí, že $a < b$ právě tehdy, když $2^a < 2^b$.*

`Důkaz`: Nezapomínáme, že našim úkolem je dokázat oba směry tvrzení (implikace zleva doprava a zprava doleva). Začneme s prvním: Předpoklad $a < b$ je definičně ekvivalentní tomu, že $b = a + k$ pro nějaké přirozené $k > 0$. Potom $2^b = 2^{a+k} = 2^a \cdot 2^k = \ell \cdot 2^a$ pro nějaké přirozené $\ell = 2^k \geq 2$, a tudíž $2^b - 2^a = (\ell - 1) \cdot 2^a \geq 1 \cdot 2^a > 0$. Tím je první část důkazu hotova.

V opačném směru postupujeme z předpokladu $2^a < 2^b$. Vydělením obou stran nerovnosti kladným číslem 2^a získáme $2^b/2^a = 2^{b-a} > 1$. Dále postupujeme sporem. Nechť tedy $a \geq b$, neboli $a - b = m \geq 0$. Potom máme $2^{a-b} = \underbrace{2 \cdot \ldots 2}_{m\times} \geq 1$. Avšak celkově $1 = 2^0 = 2^{a-b} \cdot 2^{b-a} > 1 \cdot 1 = 1$ je sporné. Proto zbývá požadovaný závěr $a < b$. □

`Komentář:` Je možno se někdy oddělenému zpracování obou směrů takového tvrzení vyhnout? Ano, stačí dělat pouze tzv. ekvivalentní úpravy, ale je to velmi nebezpečné. Co například tvrzení „$a = b$ právě když $ax = bx$“? To přece dokážeme vynásobením obou stran rovnosti stejným číslem x...

Je to sice téměř pravda, ale(!) musíme si všimnout, že násobení obou stran rovnosti je ekvivalentní úpravou jen pro $x \neq 0$; jinak nazpět dělíme nulou (což na světě dokáže pouze Chuck Norris). Zapamatujte si, že nejlepší cestou, jak se takovým chybám a problémům vyhnout, je skutečně poctivě dokazovat každý směr ekvivalence zvlášť.

2.3 Matematická indukce

Pokud se souhrnně podíváme na důkazové techniky v matematice, všimneme si, že matematická indukce je skoro „dvorní" důkazovou technikou diskrétní matematiky. To proto, že umožňuje pohodlně dokazovat i složitá tvrzení po jednotlivých (diskrétních) krocích od počátečního.

Uvažme tedy větu ve tvaru:

„Pro každé přirozené (celé) $n \geq k_0$ platí $T(n)$."

Zde k_0 je nějaké pevné přir. číslo a $T(n)$ je tvrzení parametrizované čís. n. Příkladem je třeba tvrzení:

Pro každé $n \geq 0$ platí, že n přímek dělí rovinu nejvýše na $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ oblastí.

Definice 2.5. Princip matematické indukce říká, že k důkazu věty

„Pro každé přirozené (celé) $n \geq k_0$ platí $T(n)$."

stačí ověřit platnost těchto dvou tvrzení:

- $T(k_0)$ (tzv. *báze* neboli základ indukce)
- *Pro každé $n \geq k_0$; jestliže platí $T(n)$,* (indukční předpoklad)
  pak platí také $T(n+1)$. (indukční krok)

Formálně řečeno, matematická indukce je axiomem aritmetiky přirozených čísel.

Opět jako v předešlém si tuto techniku ilustrujeme množstvím názorných příkladů.

Příklady důkazů indukcí

Příklad 2.6. *Velmi jednoduchá a přímočará indukce.*

Věta. *Pro každé přirozené. $n \geq 1$ je stejná pravděpodobnost, že při současném hodu n kostkami bude výsledný součet sudý, jako, že bude lichý.*

`Důkaz`: *Základ indukce* je zde zřejmý: Na jedné kostce (poctivé!) jsou tři lichá a tři sudá čísla, takže obě skupiny padají se stejnou pravděpodobností.

Indukční krok pro $n \geq 1$: Nechť p_n^s pravděpodobnost, že při hodu n kostkami bude výsledný součet sudý, a p_n^l je pravděpodobnost lichého. Podle indukčního předpokladu je $p_n^s = p_n^l = \frac{1}{2}$. Hoďme navíc $(n+1)$-ní kostkou. Podle toho, zda na ní padne liché nebo sudé číslo, je pravděpodobnost celkového sudého součtu rovna

$$\frac{3}{6}p_n^l + \frac{3}{6}p_n^s = \frac{1}{2}$$

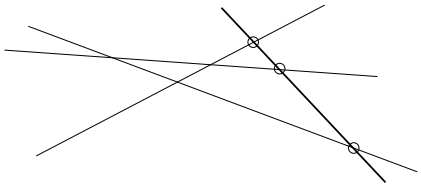
a stejně pro pravděpodobnost celkového lichého součtu. □

Příklad 2.7. *Ukázka skutečné důkazové „síly" principu matematické indukce.*

Věta. *Pro každé $n \geq 0$ platí, že n přímek dělí rovinu nejvýše na*

$$\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

oblastí.



`Důkaz`: Pro bázi indukce stačí, že 0 přímek dělí rovinu na jednu část. (Všimněte si také, že 1 přímka dělí rovinu na dvě části, jen pro lepší pochopení důkazu.)

Mějme nyní rovinu rozdělenou n přímkami na nejvýše $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ částí. Další, $(n+1)$-ní přímka je rozdělena průsečíky s předchozími přímkami na nejvýše $n+1$ úseků a každý z nich oddělí novou část roviny. Celkem tedy bude rovina rozdělena našimi přímkami na nejvýše tento počet oblastí:

$$\frac{1}{2}n(n+1)+1 \;+\; (n+1) \;=\; \frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}\cdot 2(n+1) \;+\; 1 \;=\; \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \;+\; 1$$

□

Příklad 2.8. *Další indukční důkaz rozepsaný v podrobných krocích.*

Věta. *Pro každé $n \geq 0$ platí $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.*

`Důkaz` indukcí vzhledem k n.

- Báze: Musíme dokázat tvrzení $T(0)$, což je v tomto případě rovnost $\sum_{j=0}^{0} j = \frac{0(0+1)}{2}$. Tato rovnost (zjevně) platí.
- Indukční krok: Musíme dokázat následující tvrzení pro $n \geq 0$:

  Jestliže platí $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, pak platí $\sum_{j=0}^{q} j = \frac{q(q+1)}{2}$, kde $q = n+1$.

Předpokládejme tedy, že $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ a pokusme se dokázat, že pak také

$$\sum_{j=0}^{q} j = \frac{q(q+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

To už plyne úpravou:

$$\sum_{j=0}^{q} j \;=\; \sum_{j=0}^{n} j \;+(n+1) \;=\; \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \;=\; \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \;=\; \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Podle principu matematické indukce je celý důkaz hotov. □

`Poznámka`: Výsledek Příkladu 2.8 je ukázkou tzv. sumačního vzorce pro posloupnost přirozených čísel. Jinou ukázkou je třeba vztah

$$1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1) = 1+(2n-1) \;+\; 3+(2n-3) \;+\cdots = 2n\cdot\frac{n}{2} = n^2,$$

nebo $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ a $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. Odvozování a práce s jednoduchými sumačními vzorci by také měla náležet do výbavy schopného informatika, princip matematické indukce je zde klíčový.

2.4 Komentáře k matematické indukci

Pro správné a úspěšné použití indukce v dokazování je vhodné si zapamatovat několik cenných rad:

* Základní trik všech důkazů matematickou indukcí je vhodná *reformulace* tvrzení $T(n+1)$ tak, aby se „odvolávalo“ na tvrzení $T(n)$.
  - Dobře se vždy podívejte, v čem se liší tvrzení $T(n+1)$ od tvrzení $T(n)$. Tento „rozdíl“ budete muset v důkaze zdůvodnit.
* Pozor, občas je potřeba „*zesílit*“ tvrzení $T(n)$, aby indukční krok správně „fungoval“.
  - Velkým problémem bohužel je, že není možno podat návod, jak vhodné „zesílení“ nalézt (ani kdy jej vůbec hledat). Jedná se vlastně o pokusy a „hádání z křišťálové koule“.
* Často se chybuje v důkazu indukčního kroku, neboť ten bývá většinou výrazně obtížnější než báze, ale o to zrádnější jsou chyby v samotné zdánlivě snadné bázi!
  - Dejte si dobrý pozor, od které hodnoty $n \geq k_0$ je indukční krok univerzálně platný a jestli případně báze nezahrnuje více než jednu hodnotu...

Zesílení indukčního kroku

Příklad 2.9. *Když je nutno indukční krok zesílit...*

Věta. *Pro každé $n \geq 1$ platí*

$$s(n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < 1\,.$$

Důkaz: *Báze indukce* je zřejmá, neboť $\frac{1}{1\cdot 2} < 1$.

Co však *indukční krok*? Předpoklad $s(n) < 1$ je sám o sobě „*příliš slabý*“ na to, aby bylo možno tvrdit $s(n+1) = s(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < 1$.

Neznamená to ještě, že by tvrzení nebylo platné, jen je potřeba náš indukční předpoklad *zesílit*. Budeme dokazovat

Tvrzení. *Pro každé přirozené $n \geq 1$ platí $s(n) \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.*

To platí pro $n = 1$ (nezapomeňte ověřit!) a dále už úpravou jen dokončíme zesílený indukční krok:

$$s(n+1) \;=\; s(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \;\leq\; 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \; 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \;=\; 1 - \frac{1}{n+2} \qquad \square$$

Rozšíření báze a předpokladu

Mimo zesilování tvrzení indukčního kroku jsme někdy okolnostmi nuceni i k *rozšiřování* samotné báze indukce a s ní indukčního předpokladu na více než jednu hodnotu parametru n.

– Můžeme například předpokládat platnost (parametrizovaných) tvrzení $T(n)$ *i* $T(n+1)$ *zároveň*, a pak odvozovat platnost $T(n+2)$. Toto lze samozřejmě zobecnit na jakýkoliv počet předpokládaných parametrů.

– Můžeme dokonce předpokládat platnost tvrzení $T(j)$ *pro všechna* $j = k_0, k_0+1, \ldots, n$ najednou a dokazovat $T(n+1)$. Toto typicky využijeme v případech, kdy indukční krok „rozdělí“ problém $T(n+1)$ na dvě menší části a z nich pak odvodí platnost $T(n+1)$.

`Fakt`: Obě prezentovaná „rozšíření“ jsou v konečném důsledku jen speciálními instancemi základní matematické indukce; použité rozšířené možnosti pouze zjednodušují formální zápis důkazu.

Příklad 2.10. *Když je nutno rozšířit bázi a indukční předpoklad...*

Věta. *Nechť funkce f pro každé $n \geq 0$ splňuje vztah*

$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n).$$

Pokud platí $f(0) = 1$ a zároveň $f(1) = 2$, tak platí $f(n) = n+1$ pro všechna přirozená $n \geq 0$.

`Důkaz`: Už samotný pohled na daný vztah $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$ naznačuje, že bychom měli *rozšířit indukční předpoklad* (a krok) zhruba takto:

Pro každé $n \geq 0$; jestliže platí $T(n)$; neboli $f(n) = n+1$, a zároveň platí $T(n+1)$; $f(n+1) = n+2$, pak platí také $T(n+2)$; $f(n+2) = n+3$.

Báze indukce – pozor, zde už musíme ověřit *dvě* hodnoty

$$f(0) = 0 + 1 = 1, \quad f(1) = 1 + 1 = 2\,.$$

Náš *indukční krok* tak nyní může využít celého rozšířeného předpokladu, znalosti hodnot $f(n)$ i $f(n+1)$, pro ověření

$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) = 2 \cdot (n+1+1) - (n+1) = n+3 = n+2+1\,.$$

□

`Komentář:` Jak by tento důkaz měl být formulován v „tradiční“ indukci? („Substitucí“ nového tvrzení.)

Závěrem malý „problém“

Příklad 2.11. *Aneb jak snadno lze v matematické indukci udělat chybu.*

Věta. *(„nevěta“)*
V každém stádu o $n \geq 1$ koních mají všichni koně stejnou barvu.

`Důkaz` indukcí vzhledem k n.
Báze: Ve stádu o jednom koni mají všichni koně stejnou barvu.
Indukční krok: Nechť $S = \{K_1, \ldots, K_{n+1}\}$ je stádo o $n+1$ koních. Dokážeme, že všichni koně mají stejnou barvu. Uvažme dvě menší stáda:

– $S' = \{K_1, \underline{K_2}, \ldots, K_n\}$

– $S'' = \{\underline{K_2}, \ldots, K_n, K_{n+1}\}$

Podle indukčního předpokladu mají všichni koně ve stádu S' stejnou barvu B'. Podobně všichni koně ve stádu S'' mají podle indukčního předpokladu stejnou barvu B''. Dokážeme, že $B' = B''$, tedy že všichni koně ve stádu S mají stejnou barvu. To ale plyne z toho, že koně $K_2, \ldots, K_n$ patří jak do stáda S', tak i do stáda S''. □

`Komentář:` *Ale to už je podvod! Vidíte, kde?*

Navazující studium

Jak jsme již řekli, matematické důkazy a jejich chápání jsou nezbytné ke studiu vysokoškolských matematických předmětů. Bez schopnosti přesného vyjadřování a chápání definic a vět se informatik neobejde, ani pokud se zaměřuje čistě aplikovaným směrem; viz třeba správné pochopení různých norem a specifikací.

Na druhou stranu umění "tvořit" nové matematické důkazy je dosti obtížné a nedá se jemu jen tak snadno naučit – vyžaduje to mnoho pokročilé praxe. Jelikož je schopnost formálního matematického dokazování nezbytná (převážně jen) v teoretických informatických disciplínách, není tato část kritická v celém předmětu (a u zkoušek se objeví s menším důrazem), ale to neznamená, že byste se jí mohli zcela vyhýbat. Obzvláště techniku matematické indukce by měl každý informatik aspoň trochu ovládat, neboť s jejím použitím se zajisté ještě mnohokráte setkáte v budoucím studiu.

3 Množiny, množinové operace

Úvod

V přehledu matematických formalismů informatiky se v této a příští lekci zaměříme na základní datové typy matematiky, tj. na množiny, relace a funkce. *Netradiční sousloví „datové typy“ matematiky zde volíme záměrně, abychom zdůraznili jejich fundamentálnost pro výstavbu navazující teorie v analogii k programování.*

O množinách jste sice zajisté slyšeli už na základní škole, ale podstatou našeho předmětu je uvést povětšinou neformálně známé pojmy na patřičnou formální úroveň nutnou pro teoretické základy informatiky. V případě konečné teorie množin si zde vystačíme s tzv. „naivním“ pohledem, který dostatečně matematicky přesně vystihuje všechny jejich konečné aspekty (o komplikacích nekonečných množin se krátce zmíníme až v Lekci 12).

Cíle

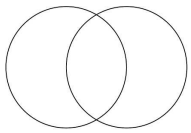
V této lekci si ukážeme první krok k seriózně vybudované matematické teorii množin – tzv. naivní teorii množin, která nám velmi dobře poslouží ve všech konečných případech. Na to navážeme zavedením základního množinového kalkulu a shrnutím běžných vlastností množin. Závěrem si uvedeme příklady rekurzivně definovaných posloupností.

3.1 Pojem množiny

Položme si hned na úvod tu nejdůležitější otázku: Co je vlastně ***množina***?
Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď... Abychom se vůbec někam v našem úvodu dostali, spokojíme se zatím jen s přirozeným „naivním pohledem“.

`Definice` naivní teorie množin: *„Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.“*

`Komentář:` Příklady zápisu množin výčtem prvků
$\emptyset$, $\{a, b\}$, $\{b, a\}$, $\{a, b, a\}$, $\{\{a, b\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, $\{x \mid x \text{ je liché přirozené číslo}\}$.



Co je ale pak *prvek*? Tady pozor, pojem *prvku* sám o sobě nemá matematický význam, svého významu totiž nabývá pouze ve spojení „*být prvkem množiny*“. Prvky množiny tak může být cokoliv, mimo jiné i dalším množiny.

`Komentář:` Relativitu významu vztahu „prvek–množina“ si můžeme přiblížit třeba na vztahu „*podřízený–nadřízený*“ z běžného pracovního života. Tam také nemá smysl jen říkat, že je někdo podřízeným, aniž řekneme také jeho nadřízeného. Přitom i vedoucí je někomu ještě podřízený a naopak i ten poslední podřízený pracovník může být pánem třeba svého psa. Podobně je tomu s množinou jako „*nadřízenou*“ svých prvků.

Ale přece jenom... v dobře definovaném kontextu lze (omezeně) mluvit o prvcích jako *samostatných entitách*. Formálně se například jedná o *prvky* pevně dané nosné množiny.

`Značení` množin a jejich prvků:

- $x \in M$ „x je *prvkem* množiny M“,
- $\emptyset$ je *prázdná* množina $\{\}$.

`Komentář:` Některé vlastnosti vztahu „být prvkem“ jsou

* $a \in \{a,b\}$, $a \notin \{\{a,b\}\}$, $\{a,b\} \in \{\{a,b\}\}$, $a \notin \emptyset$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \notin \emptyset$,
* *rovnost* množin dle svých prvků $\{a,b\} = \{b,a\} = \{a,b,a\}$, $\{a,b\} \neq \{\{a,b\}\}$.

`Značení`: Počet prvků (*mohutnost*) množiny A zapisujeme $|A|$.

`Komentář:` $|\emptyset| = 0$, $|\{\emptyset\}| = 1$, $|\{a,b,c\}| = 3$, $|\{\{a,b\},c\}| = 2$.

Jednoduché srovnání množin

Vztah „*být prvkem množiny*“ přirozeně nám podává i způsob porovnávání množin mezi sebou. Jedná se o klíčovou část teorie množin.

`Definice`: Množina A je *podmnožinou* množiny B, právě když každý prvek A je prvkem B. Píšeme $A \subseteq B$ nebo obráceně $B \supseteq A$. Říkáme také, že se jedná o *inkluzi*.

* Platí $\{a\} \subseteq \{a\} \subseteq \{a,b\} \not\subseteq \{\{a,b\}\}$, $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,
* $A \subsetneq B$ právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$ (A je *vlastní* podmnožinou B).

Z naivní definice množiny pak přímo vyplývá následující:

`Definice`: Dvě množiny jsou si *rovny* $A = B$ právě když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

* Podle naivní definice jsou totiž množiny A a B stejné, mají-li stejné prvky.
* Důkaz rovnosti množin $A = B$ má obvykle *dvě části*: Odděleně se dokáží inkluze $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

Ukázky nekonečných množin

`Značení`: Běžné číselné množiny v matematice jsou následující

* $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ je množina přirozených čísel,
* $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ je množina celých čísel,
* $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,\dots\}$ je množina celých kladných čísel,
* $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel (zlomků).
* $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel.

`Komentář:` Tyto uvedené číselné množiny jsou vesměs *nekonečné*, na rozdíl od konečných množin uvažovaných v předchozím „naivním“ pohledu. Pojem nekonečné množiny se přímo v matematice objevil až teprve v 19. století a bylo s ním spojeno několik *paradoxů* ukazujících, že naivní pohled na teorii množin pro nekonečné množiny *nedostačuje*. My se k problematice nekonečných množin, Kantorově větě a Russelově paradoxu vrátíme v závěru našeho předmětu v Lekci 12.

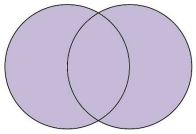
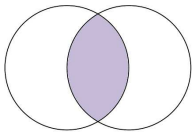
3.2 Množinové operace

Začněme se základními operacemi množinového kalkulu, které zajisté na intuitivní úrovni již ovládáte ze školy. Pro formální úplnost podáme jejich přesné definice, na které se můžete odvolávat v důkazech.

Sjednocení a průnik

Definice 3.1. ***Sjednocení*** $\cup$ ***a průnik*** $\cap$ dvou množin A, B definujeme

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}. \end{aligned}$$

$A \cup B$  $A \cap B$ 

* Příklady $\{a,b,c\} \cup \{a,d\} = \{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c\} \cap \{a,d\} = \{a\}$.
* Vždy platí „distributivita“ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
* a také „asociativita“ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (stejně pro $\cup$) a „komutativita“ $A \cap B = B \cap A$ (stejně pro $\cup$).

  `Komentář:` Asociativita a komutativita operací sjednocení a průniku je na jednu stranu zcela přirozená, na druhou stranu však velmi důležitá například pro platnost následující definice.

`Definice`: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí I rozšířeně definujeme

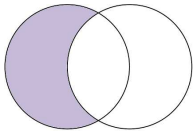
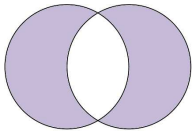
$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro } \textit{nějaké } i \in I\}, \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro } \textit{každé } i \in I\}. \end{aligned}$$

`Komentář:` Nechť $A_i = \{2 \cdot i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ je množina všech sudých přirozených čísel. Nechť $B_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = \emptyset$.

Množinový rozdíl

Definice 3.2. ***Rozdíl*** $\setminus$ ***a symetrický rozdíl*** Δ dvou množin A, B definujeme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\}, \\ A \,\Delta\, B &= \big(A \setminus B\big) \cup \big(B \setminus A\big). \end{aligned}$$

$A \setminus B$  $A \Delta B$ 

* Příklady $\{a,b,c\} \setminus \{a,b,d\} = \{c\}$, $\{a,b,c\} \Delta \{a,b,d\} = \{c,d\}$.
* Vždy platí například $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ apod.

`Definice`: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí *konečné* I rozšířeně definujeme

$$\bigtriangleup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro } \textit{lichý počet } i \in I\}.$$

`Komentář:` Povšimněte si, že operace rozdílu není asociativní ani komutativní (ostatně stejně je tomu u aritmetického rozdílu). Symetrický rozdíl už asociativní i komutativní je, není to však na první pohled vidět. Uměli byste toto dokázat?

`Definice`: Nechť $A \subseteq M$. *Doplňkem A vzhledem k M* je množina $\overline{A} = M \setminus A$.

`Komentář:` Jedná se o poněkud specifickou operaci, která *musí být vztažena* vzhledem k *nosné množině* M! Je-li $M = \{a, b, c\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \{c\}$. Je-li $M = \{a, b\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \emptyset$.

* Vždy pro $A \subseteq M$ platí $\overline{\overline{A}} = A$ („dvojí“ doplněk).
* Vždy pro $A, B \subseteq M$ platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (Viz Vennovy diagramy.)

Uspořádané dvojice a kartézský součin

Zatímco prvky v množinách jsou zcela *neuspořádané*, jsou mnohé situace, kdy musíme pracovat se „*seřazenými*“ výčty prvků. V teorii množin lze takovéto seřazení definovat oklikou následovně:

`Definice`: *Uspořádaná dvojice* (a, b) je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

`Fakt`: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$. Uměli byste toto sami dokázat přímo z podané definice?

* Co je podle definice (a, a)? Je to $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$.

Definice 3.3. ***Kartézský součin*** dvou množin A, B definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z A a B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}\,.$$

* Příklady $\{a, b\} \times \{a\} = \{(a, a), (b, a)\}$, $\{c, d\} \times \{a, b\} = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$.
* Platí $\emptyset \times X = \emptyset = X \times \emptyset$ pro každou množinu X.
* Jednoduchá mnemotechnická pomůcka říká $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

`Definice`: Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou k-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ induktivně

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, \cdots, a_i), a_{i+1})$.

Všimněte si, že definice používá tzv. rekurentní vztah, blíže viz Oddíl 3.4.

`Fakt`: Platí $(a_1, \cdots, a_k) = (b_1, \cdots, b_k)$ právě když $a_i = b_i$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ kde $1 \leq i \leq k$.

`Definice` *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\}\,.$$

* Například $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$.
* Co je A^0? $\{\emptyset\}$, neboť jediná uspořádaná 0-tice je právě prázdná $\emptyset$.

`Poznámka`: Podle uvedené definice *není součin asociativní*, tj. obecně nemusí platit, že $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$. V matematické praxi je někdy výhodnější uvažovat upravenou definici, podle níž součin *asociativní je*. Pro účely této přednášky není podstatné, k jaké definici se přikloníme. Prezentované definice a věty „fungují“ pro obě varianty.

Potenční množina

Definice 3.4. ***Potenční množina*** množiny A,
neboli množina všech podmnožin, je definovaná vztahem

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}\,.$$

* Platí například $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,
* $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}, \quad 2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
* $2^{\{a\}\times\{a,b\}} = \{\emptyset, \{(a,a)\}, \{(a,b)\}, \{(a,a),(a,b)\}\}$.

Věta 3.5. *Počet prvků potenční množiny splňuje* $|2^A| = 2^{|A|}$.

`Důkaz`: Stručně indukcí podle $|A|$: Pro $A = \emptyset$ platí $|2^A| = |\{\emptyset\}| = 1$. Pro každý další prvek $b \notin A$ rozdělíme všechny podmnožiny $A \cup \{b\}$ „napolovic“ na ty neobsahující b a na ty obsahující b, tudíž

$$\left|2^{A\cup\{b\}}\right| = 2 \cdot \left|2^A\right| = 2^{|A|+1} = 2^{|A\cup\{b\}|}\,. \qquad \square$$

3.3 Porovnávání a určení množin

Pro obecnou ilustraci formálního množinového kalkulu si ukažme dva důkazy rovností mezi množinovými výrazy. Podobně lze (rozepsáním příslušných definic) rutinně dokazovat další množinové vztahy.

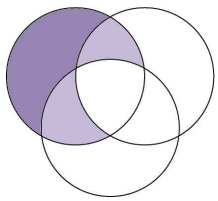
Věta 3.6. *Pro každé dvě množiny* $A, B \subseteq M$ *platí* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

`Důkaz` v obou směrech rovnosti.

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$: Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A \cup B}$, právě když $x \notin A \cup B$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$. To znamená $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$: Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, právě když $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$. To znamená $x \notin A \cup B$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A \cup B}$. $\square$

Věta 3.7. *Pro každé tři množiny* A, B, C *platí*

$$A \setminus (B \cap C) \;=\; (A \setminus B) \;\cup (A \setminus C)\,.$$



`Důkaz` (viz ilustrační obrázek).

- $A \setminus (B \cap C) \;\subseteq\; (A \setminus B) \;\cup (A \setminus C)$: Je-li $x \in A \setminus (B \cap C)$, pak $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, neboli $x \notin B$ nebo $x \notin C$. Pro první možnost máme $x \in (A \setminus B)$, pro druhou $x \in (A \setminus C)$.
- Naopak $A \setminus (B \cap C) \;\supseteq\; (A \setminus B) \;\cup (A \setminus C)$: Je-li $x \in (A \setminus B) \;\cup (A \setminus C)$, pak $x \in (A \setminus B)$ nebo $x \in (A \setminus C)$. Pro první možnost máme $x \in A$ a zároveň $x \notin B$, z čehož plyne $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, a tudíž $x \in A \setminus (B \cap C)$. Druhá možnost je analogická. $\square$

Charakteristický vektor (pod)množiny

V případech, kdy všechny uvažované množiny jsou podmnožinami nějaké konečné *nosné množiny* X, což není neobvyklé v programátorských aplikacích, s výhodou využijeme následující reprezentaci množin.

`Definice`: Mějme nosnou množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pro $A \subseteq X$ definujeme *charakteristický vektor* χ_A jako

$$\chi_A = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \text{ kde } c_i = 1 \text{ pro } x_i \in A \text{ a } c_i = 0 \text{ jinak.}$$

Užitečnost této reprezentace je ilustrována také následnými fakty.

- Platí $A = B$ právě když $\chi_A = \chi_B$.
- Množinové operace jsou realizovány „bitovými funkcemi“
  sjednocení $\sim$ OR, průnik $\sim$ AND, symetrický rozdíl $\sim$ XOR.

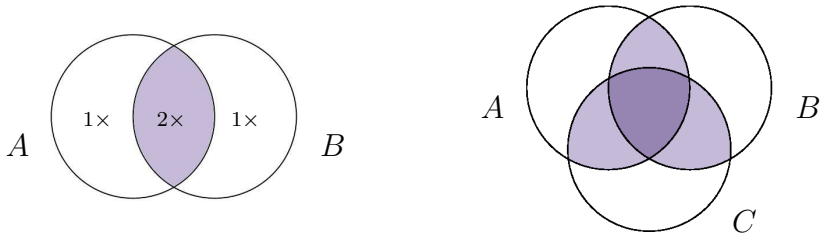
Princip inkluze a exkluze

Tento důležitý a zajímavý kombinatorický princip je někdy také nazýván „princip *zapojení a vypojení*“. Používá se ke zjišťování počtů prvků množin s neprázdnými průniky.

Věta 3.8. *Počet prvků ve sjednocení dvou či tří množin spočítáme:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



`Důkaz`: Uvedeme si podrobný důkaz prvního vztahu $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, přičemž druhá část je analogická (viz obrázková ilustrace). Nechť $x \in A \cup B$. Pokud $x \notin B$, tak je $x \in A$ a prvek x je započítán na pravé straně $|A| + |B| - |A \cap B|$ právě jednou v $|A|$. Obdobně je to v případě $x \notin A$. Nakonec pro $x \in A \cap B$ je ve vztahu $|A| + |B| - |A \cap B|$ tento prvek x započítán také $1 + 1 - 1 = 1$ krát. □

`Komentář:` Všimněte si, že Větu 3.8 lze stejně tak využít k výpočtu počtu prvků v průniku množin...

Příklad 3.9. *Z* 1000 *televizí jich při první kontrole na výrobní lince má* 5 *vadnou obrazovku,* 10 *je poškrábaných a* 12 *má jinou vadu. Přitom* 3 *televize mají současně všechny tři vady a* 4 *jiné jsou poškrábané a mají jinou vadu. Kolik televizí je celkem vadných?*

Řešení: Dosazením $|A| = 5$, $|B| = 10$, $|C| = 12$, $|A \cap B \cap C| = 3$, (zde pozor) $|A \cap B| = 3 + 0$, $|A \cap C| = 3 + 0$, $|B \cap C| = 3 + 4$ do Věty 3.8 zjistíme výsledek 17. □

`Poznámka`. Jen stručně, bez důkazu a bližšího vysvětlení, si uvedeme *obecnou formu principu inkluze a exkluze*:

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

(Jeho znalost nebude v předmětu vyžadována.)

3.4 Posloupnosti a rekurentní vztahy

Uspořádané k-tice (Oddíl 3.2) jsou také nazývány *konečnými posloupnostmi* délky k, neboli seřazeními prvků z dané neprázdné množiny hodnot (opakování prvků je povoleno). Tento pohled lze přirozeně zobecnit na nekonečné posloupnosti, avšak musíme sáhnout k trochu složitějším pojmům:

`Definice`: *Nekonečná posloupnost* p je zobrazením z $\mathbb{N}$ do svého oboru hodnot H, neboli $p : \mathbb{N} \to H$ (viz také Oddíl 4.1 o funkcích). Mimo „funkčního“ zápisu $p(n)$ často používáme „indexovou“ formu zápisu funkční hodnoty jako p_n.

`Poznámka`: Oborem hodnot posloupnosti obvykle bývá nějaká číselná množina, ale může to být i jakákoliv jiná množina. Také definiční obor posloupnosti (tj. indexy) může začínat od nuly nebo i od jedničky, jak je v aplikacích potřeba.

- Příklady posloupností:
  - $p_0 = 0$, $p_1 = 2, \ldots, p_i = 2i, \ldots$ je posloupnost sudých nezáporných čísel.
  - 3, 3.1, 3.14, 3.141, ... je posloupnost postupných dekadických rozvojů π.
  - $1, -1, 1, -1, \ldots$ je posloupnost určená vztahem $p_i = (-1)^i$, $i \geq 0$.
  - Pokud chceme stejnou posloupnost $1, -1, 1, -1, \ldots$ zadat jako q_i, $i \geq 1$, tak ji určíme vzorcem $q_i = (-1)^{i-1}$.
- Posloupnost je *rostoucí* (či *klesající*), pokud $p_{n+1} > p_n$ ($p_{n+1} < p_n$) pro všechna n.

Rekurentní definice posloupnosti

Slovem *rekurentní* označujeme takové definice (či popisy), které se v jistých bodech odvolávají samy na sebe. (Už jste se setkali s „rekurzí“ při programování? A víte, co znamená?) Místo nepřehledných formálních definic si *rekurentní vztahy* uvedeme několika názornými ukázkami.

- Zadáme-li posloupnost p_n vztahy $p_0 = 1$ a $p_n = 2p_{n-1}$ pro $n > 0$, pak platí $p_n = 2^n$ pro všechna n.
- Obdobně můžeme zadat posloupnost q_n vztahy $q_1 = 1$ a $q_n = q_{n-1} + n$ pro $n > 1$. Potom platí $q_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ pro všechna n. Uměli byste toto dokázat indukcí? Viz Příklad 2.8.
- Známá Fibonacciho posloupnost je zadaná vztahy $f_1 = f_2 = 1$ a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n > 2$.

Příklad 3.10. *Posloupnost f je zadaná rekurentní definicí*

$$f(0) = 3 \quad \text{a} \quad f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$$

pro všechna přirozená n. Určete hodnotu $f(n)$ explicitním vzorcem v závislosti na n.

Řešení: V první fázi řešení takového příkladu musíme nějak „uhodnout“ hledaný vzorec pro $f(n)$. Jak? Zkusíme vypočítat několik prvních hodnot a uvidíme…

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot f(0) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ f(2) &= 2 \cdot f(1) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \\ f(3) &= 2 \cdot f(2) + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 \\ f(4) &= 2 \cdot f(3) + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63 \end{aligned}$$

Nepřipomínají nám tato čísla něco? Co třeba posloupnost $8-1$, $16-1$, $32-1$, $64-1\ldots$? Bystrému čtenáři se již asi podařilo uhodnout, že půjde o mocniny dvou snížené o 1. Přesněji, $f(n) = 2^{n+2} - 1$ (proč je exponent $n+2$? inu proto, aby správně vyšlo $f(0)$).

Ve druhé nesmíme ale zapomenout správnost našeho „věštění“ dokázat, nejlépe matematickou indukcí podle n.

- Báze: $f(0) = 2^{0+2} - 1 = 4 - 1 = 3$ platí.
- Indukční krok: za využití indukčního předpokladu

$$f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1 = 2 \cdot (2^{n+2} - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{(n+1)+2} - 1,$$

  což také platí.

Podle principu matematické indukce je nyní dokázáno, že pro zadanou rekurentní posloupnost f platí $f(n) = 2^{n+2} - 1$ pro všechna přirozená n. □

Navazující studium

I když jste se s “množinami” setkávali už od základní školy, do matematické teorie množin asi nahlédnete na VŠ poprvé. Nezalekněte se na úvod formality vyjadřování, která je bohužel nezbytná, a naučte se s množinami a relacemi dobře pracovat aspoň na zde ukázané naivní úrovni konečné teorie množin. (Lehký náhled na obecně nekonečné množiny a jejich zdánlivé paradoxy i informatické aplikace si ukážeme později v Lekci 12…)

Dále si srovnejte pojem posloupnosti s pojmem funkce v Oddílu 4.1 a také si později povšimněte blízké koncepční podobnosti rekurentních definic s induktivními definicemi množin a funkcí v Oddíle 6.3.

4 Relace a jejich použití

Úvod

V návaznosti na předchozí lekci si podrobně rozebereme matematické formalismy relací a funkcí coby jejich speciálního případu. Na rozdíl od množin, které se v jisté velmi naivní formě objevují už na základní škole, se relacím *v jejich abstraktní podobě mnoho pozornosti ve výuce nevěnuje. Stejně tak s pojmem* funkce *jste se již setkali na nižších stupních škol, ale povětšinou jen ve spojení s aritmetickými a analytickými funkcemi tvaru* $x + 1$, $x^2 - y$, *či* $\sin x$, $1 + \cos x^2$, *atd.*

Jak uvidíte nyní, pojmy relace i funkce jsou zcela abstraktní a neváže se ně žádný analytický vzorec výpočtu či podobné. Přitom na pojem (zcela obecné) relace velmi brzo narazí každý informatik při studiu dat a databází, které nad těmito pojmy staví. Není to však jen oblast relačních databází, ale i jiná místa informatiky, kde se obecné funkce a relace skrývají či přímo explicitně objevují. Nejčastěji se tak setkáte s binárními relacemi nad množinami, na něž se v textu dále zaměříme.

Cíle

Úkolem této lekce je vybudovat matematický aparát (konečných) relací, s primárním zaměřením na funkce a binární relace typu ekvivalence a uspořádání nad množinou. Ve vztahu k binárním relacím je zavedeno množství pojmů, které jsou později užitečné v různých oblastech matematiky i informatiky. V obecnosti jsou také vysvětleny inverze relací a jejich skládání. Látka pak plynule pokračuje Lekcí 5.

4.1 Relace a funkce nad množinami

Vedle množin dalším důležitým základním „*datovým typem*“ matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich mnohotvárnému použití v informatice věnujeme významnou pozornost v této i dvou příštích lekcích.

Definice 4.1. ***Relace*** mezi množinami $A_1, A_2, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$,
je *libovolná* podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \,.$$

Pokud $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *$k$-ární relaci R na A*. Speciálně tak mluvíme třeba o *binární* ($k = 2$), *ternární* ($k = 3$) nebo *unární* ($k = 1$) relaci.

`Komentář:` Příklady relací.

* $\{(1, a), (2, a), (2, b)\}$ je relace mezi $\{1, 2, 3\}$ a $\{a, b\}$.
* $\{(i, 2 \cdot i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je *binární* relace na $\mathbb{N}$.
* $\{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ je *ternární* relace na $\mathbb{N}$.
* $\{3 \cdot i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je *unární* relace na $\mathbb{N}$.
* Jaký význam vlastně mají unární a nulární relace na A?

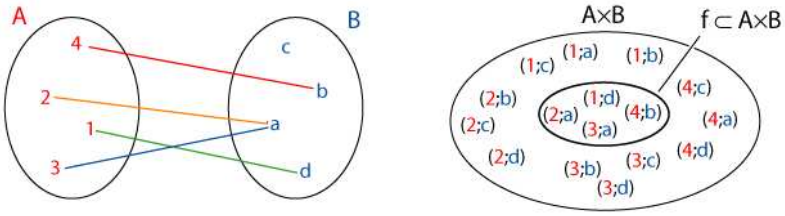
Uvědomme si, jak obecně je relace definována – její definice umožňuje podchytit skutečně libovolné „vztahy“ mezi prvky téže i různých množin. V praxi se relace velmi široce využívají třeba v relačních databázích...

Funkce mezi množinami

Za první setkání s instancemi relací se většinou dá považovat pojem funkce. Přitom tradiční „školní“ pojetí *funkce* ji obvykle identifikuje s nějakým výpočetním (analytickým) předpisem či vzorcem. Pojem funkce je však daleko obecnější a zcela abstraktní, což si v této části textu bohatě ilustrujeme i pro lepší pochopení obecnějšího pojmu relace.

Definice 4.2. ***(Totální) funkce*** z množiny A do množiny B je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$. Množina A se nazývá *definiční obor* a množina B *obor hodnot* funkce f.

`Komentář:` Neformálně řečeno, ve funkci f je každé „vstupní“ hodnotě x přiřazena *jednoznačně* „výstupní“ hodnota y. (V obecné relaci počty „přiřazených“ dvojic neomezujeme...)



Na druhou stranu si všimněte, že definiční obor i obor hodnot jsou součástí definice konkrétní funkce, neboli například v ukázce je oborem hodnot $B = \{a, b, c, d\}$, přestože samotné c není hodnotou pro žádný vstup.

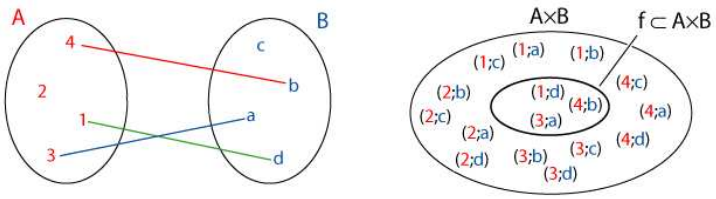
`Značení`: Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$. Zápis $f : A \to B$ říká, že f je funkce s definičním oborem A a oborem hodnot B. Funkcím se také říká *zobrazení*.

`Komentář:` Příklady funkcí jsou třeba následující.

* Definujeme funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $f(x) = x + 8$. Pak $f = \{(x, x + 8) \mid x \in \mathbb{N}\}$.
* Definujeme funkci $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $plus(i, j) = i + j$. Pak $plus = \{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

`Definice`: Pokud naši Definici 4.2 upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z A do B.

`Komentář:`



V parciální funkci f nemusí být pro některé „vstupní“ hodnoty x funkční hodnota definována (viz například $f(2)$ v uvedeném obrázku).

Pro *nedefinovanou* hodnotu používáme znak $\perp$.

`Komentář:` Následuje několik příkladů parciálních funkcí.

* Definujeme parciální funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{jestliže } x \geq 0, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Tj. $f = \{(x, 3 + x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

* Také funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná běžným analytickým předpisem $f(x) = \log x$ je jen parciální – není definována pro $x \leq 0$.

* Co je relace, přiřazující lidem v ČR jejich (česká) rodná čísla?

4.2 Reprezentace konečných relací

Oblastí, kde informatici nejčastěji potkají obecné relace, je bezesporu ukládání dat. To proto, že shromažďovaná data, stejně jako relace, především sledují vztahy mezi objekty. Na druhou stranu je *relační databáze* zcela obecnou ukázkou reprezentace jakékoliv relace, kterou si ilustrujeme příkladem.

Příklad 4.3. *Tabulka relační databáze prezentuje obecnou relaci.*

Definujme následující množiny („elementární typy“)

* ZNAK $= \{a, \cdots, z, A, \cdots, Z, mezera\}$,
* CISLICE $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Dále definujeme tyto množiny („odvozené typy“)

* JMENO $=$ ZNAK^{15}, PRIJMENI $=$ ZNAK^{20}, VEK $=$ CISLICE^3,
* ZAMESTNANEC „$\in$“ JMENO $\times$ PRIJMENI $\times$ VEK.

Relaci „typu“ *ZAMESTNANEC* pak lze reprezentovat tabulkou:

JMENO	*PRIJMENI*	*VEK*
Jan	Novák	42
Petr	Vichr	28
Pavel	Zíma	26
Stanislav	Novotný	52

□

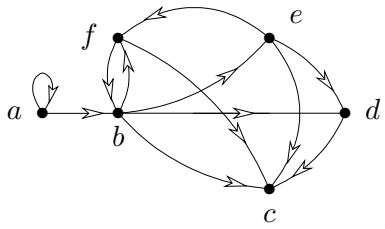
Reprezentace binárních relací na množině

Jistě čtenáři uznají, že zadání relace výčtem jejích složek není pro člověka (na rozdíl od počítače) tím nejpříjemnějším způsobem. Je tedy přirozené se ptát, jak co nejnázorněji takovou relaci, alespoň v její nejčastější binární podobě, ukázat.

`Značení`: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně znázornit jejím *grafem*:

- Prvky M znázorníme jako body v rovině.
- Prvek $(a, b) \in R$ znázorníme jako *orientovanou hranu* („šipku“) z a do b. Je-li $a = b$, pak je touto hranou „smyčka“ na a.

`Komentář:` Například mějme $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ a $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (d, c), (e, c), (f, c), (e, d), (e, f), (f, b)\}$, pak:

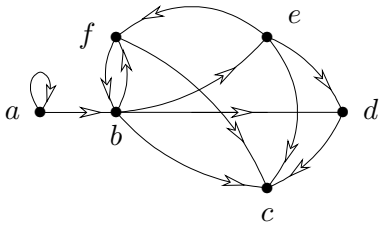


Pozor, nejedná se o „grafy funkcí“ známé třeba z matematické analýzy.

V případě, že M je nekonečná nebo „velká“, může být reprezentace R jejím grafem nepraktická (záleží také na míře „pravidelnosti“ R).

`Značení`: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně zapsat také pomocí *matice* relace – matice $\boldsymbol{A}$ typu $M \times M$ s hodnotami z $\{0, 1\}$, kde $a_{i,j} = 1$ právě když $(i, j) \in R$.

`Komentář:`



$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

4.3 Vlastnosti binárních relací

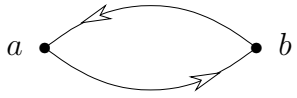
Pro začátek dalšího matematického výkladu relací si výčtem a doprovodnými schematickými obrázky uvedeme pět základních vlastností binárních relací na stejné množině, které nás typicky v matematické teorii zajímají. Je třeba si uvědomit, že se budeme zabývat velmi speciálním případem, neboť uvedené vlastnosti dávají dobrý smysl pouze pro uspořádané dvojice na téže množině, ale na druhou stranu se jedná o užitečný speciální případ.

Definice 4.4. Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

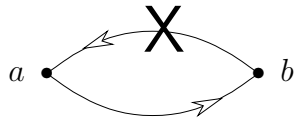
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;

- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;

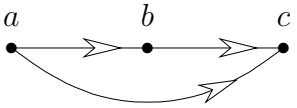
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, a) \in R$, pak $a = b$;



- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



Následují dva základní typy binárních relací; kde R je

- relace *ekvivalence*, právě když je R reflexivní, symetrická a tranzitivní;
- *částečné uspořádání*, právě když je R reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (často říkáme jen *uspořádání*).

`Komentář:` Pozor, může být relace *symetrická i antisymetrická zároveň*? Ano!

Vezměte si relaci $R = \{(x, x) \mid x \in M\}$, která obě jmenované vlastnosti splňuje. Proto pokud jste třeba dotázáni, zda relace je symetrická, nestačí se v odpovědi odvolávat na fakt, že je antisymetrická(!), neboť tyto vlastnosti se nevylučují.

Příklad 4.5. *Několik příkladů relací definovaných v přirozeném jazyce.*

Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované takto

- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo;
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y (dejme tomu na celé mm);
- $(x, y) \in R$ právě když výška x a y se neliší více jak o 2 mm;
- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y;
- $(x, y) \in R$ právě když x má jinou výšku než y (dejme tomu na celé mm);
- $(x, y) \in R$ právě když x je zamilován(a) do y.

Zamyslete se podrobně, které z definovaných vlastností tyto jednotlivé relace mají. Které z nich tedy jsou ekvivalencí nebo uspořádáním? □

Příklad 4.6. *Jaké vlastnosti mají následující relace?*

- Buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x dělí y. (*Částečné uspořádání*, ale ne každá dvě čísla jsou porovnatelná.)
- Buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejný zbytek po dělení číslem 5. (*Ekvivalence.*)
- Nechť $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ je množina funkcí. Buď $R \subseteq F \times F$ definovaná takto $(f, g) \in R$ právě když $f(x) < g(x)$ pro všechna x. (*Ireflexivní*, *antisymetrická* a *tranzitivní*, ale ne reflexivní – striktně řečeno není uspořádáním.) □

`Komentář:` Co v případě, že naše relace některou z poptávaných vlastností nemá, ale nám by se ta vlastnost hodila? To řeší tzv. *uzávěry relací*:

- Reflexivní uzávěr jednoduše přidá do relace všechny dvojice (x, x) nad nosnou množinou.
- Symetrický uzávěr zahrne do relace všechny obrácené dvojice k existujícím dvojicím, neboli všechna chybějící (x, y) pokud $(y, x) \in R$.
- Tranzitivní uzávěr nelze popsat až tak jednoduše, ale stručně řečeno přidává do relace všechny ty dvojice (x, y), pro které se lze (v grafu relace) dostat z x do y „po šipečkách".

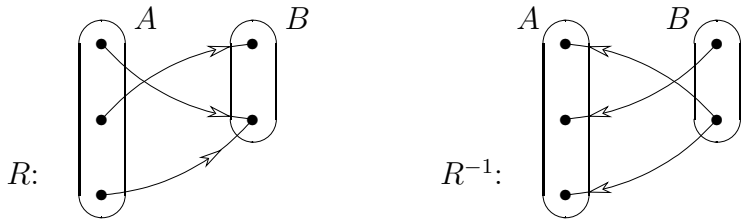
Formálně se této problematice uzávěrů relací bude věnovat Oddíl 6.4.

4.4 Inverzní relace a skládání relací

Ve výkladu se nyní vrátíme k obecnému pojetí relací mezi (třeba různými) množinami. K použitelné práci s relacemi v aplikacích se dostaneme, pokud budeme umět relace správně „převracet" a „skládat". To nám umožní následující definice.

`Definice`: Nechť $R \subseteq A \times B$ je *binární* relace mezi A a B. *Inverzní relace* k relaci R se značí R^{-1} a je definována takto:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

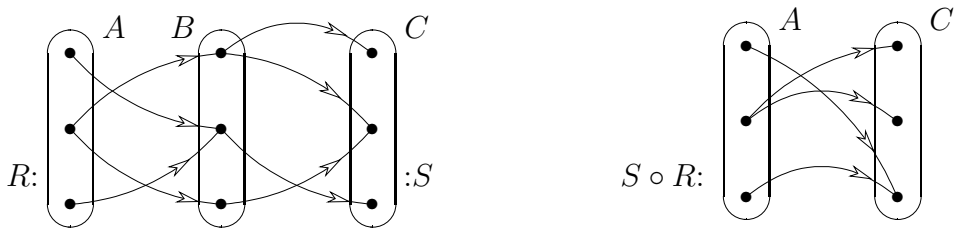


R^{-1} je tedy relace *mezi* B a A.

Následuje klíčová definice, pro jejíž bližší ilustraci odkazujeme také na Příklad 4.8.

Definice 4.7. ***Složení (kompozice)*** relací R a S.
Nechť $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$ jsou binární relace. *Složení* relací R a S (v tomto pořadí!) je relace $S \circ R \subseteq A \times C$ definovaná takto:

$$S \circ R = \{(a, c) \mid \text{existuje } b \in B \text{ takové, že } (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$$



Složení relací čteme „R *složeno s* S" nebo (pozor na pořadí!) „S *po* R".

`Komentář:` Několik matematických příkladů skládání relací následuje zde.

* Je-li
  - $A = \{a, b\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{X, Y\},$

– $R = \{(a,1),(b,1),(b,2)\}, \quad S = \{(1,X)\},$

pak složením vznikne relace

– $S \circ R = \{(a,X),(b,X)\}.$

* Složením funkcí $h(x) = x^2$ a $f(x) = x+1$ na $\mathbb{R}$ vznikne funkce

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) \;=\; x^2 + 1.$$

* Složením těchže funkcí „*naopak*“ ale vznikne funkce $(h \circ f)(x) = h(f(x)) \;=\; (x+1)^2$.

`Poznámka`: Nepříjemné je, že v některých oblastech matematiky (například v algebře při skládání zobrazení) se setkáme s *právě opačným* zápisem skládání, kdy se místo $S \circ R$ píše $R \cdot S$ nebo jen RS. Proto je si vždy dobré slovně ujasnit, které pořadí skládaných relací máme na mysli. My zde zásadně budeme používat pořadí $S \circ R$.

4.5 Skládání relací „v praxi“

Podívejme se nyní, jak se skládání relací přirozeně objevuje v práci s relačními databázemi. (Dá se zjednodušeně říci, že právě v operátoru skládání tabulkových relací tkví hlavní smysl relačních databází...)

Příklad 4.8. *Skládání v relační databázi studentů, jejich předmětů a fakult.*

Mějme dvě binární relace – jednu R přiřazující studentům MU kódy jejich zapsaných předmětů, druhou S přiřazující kódy předmětů jejich mateřským fakultám. Malý výsek z těchto relací může v tabulkové reprezentaci vypadat třeba následovně.

R :

student (učo)	předmět (kód)
121334	MA010
133935	M4135
133935	IA102
155878	M1050
155878	IB000

S :

předmět (kód)	fakulta MU
MA010	FI
IB000	FI
IA102	FI
M1050	PřF
M4135	PřF

Jak z těchto „tabulkových“ relací zjistíme, kteří studenti mají zapsané předměty na kterých fakultách (třeba na FI)?

Jedná se jednoduše o *složení relací* $S \circ R$. V našem příkladě tabulkové reprezentace vyjde výsledek:

$S \circ R$:

student (učo)	fakulta MU
121334	FI
133935	FI
133935	PřF
155878	FI
155878	PřF

□

Zobecněné skládání relací

V praktických použitích relačních tabulek povětšinou nevystačíme jen s binárními relacemi, takže je přirozené se ptát, jestli lze podobně skládat i více-ární relace. Odpověď je snadná – lze to a ani nepotřebujeme novou definici, vystačíme s tou, kterou už máme výše uvedenou.

`Definice`: (***skládání relací vyšší arity***):
Mějme relace $T \subseteq K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_k$ a $U \subseteq L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_\ell$, přičemž pro nějaké $m < \min(k, \ell)$ platí $L_1 = K_{k-m+1}, L_2 = K_{k-m+2}, \ldots, L_m = K_k$. Pak relaci T lze *složit* s relací U na zvolených m složkách $L_1, \ldots, L_m$ („překrytí“) s *použitím Definice 4.7* takto:

* Položme $A = K_1 \times \cdots \times K_{k-m}$, $B = L_1 \times \cdots \times L_m$ a $C = L_{m+1} \times \cdots \times L_\ell$.
* Příslušné relace pak jsou $R = \{(\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B \mid (a_1, \ldots a_{k-m}, b_1, \ldots b_m) \in T\}$ a $S = \{(\vec{b}, \vec{c}) \in B \times C \mid (b_1, \ldots b_m, c_{m+1}, \ldots c_\ell) \in U\}$.
* Nakonec přirozeně položme $U \circ_m T \simeq S \circ R$, takže vyjde

$$U \circ_m T = \left\{(\vec{a}, \vec{c}) \mid \text{ ex. } \vec{b} \in B, \text{ že } (a_1, \ldots a_{k-m}, b_1, \ldots b_m) \in T \text{ a } (b_1, \ldots b_m, c_{m+1}, \ldots c_\ell) \in U\right\}.$$

Schematicky pro snadnější orientaci ve složkách našich relací:

$$\begin{array}{rcccc} T \subseteq & K_1 \times \cdots \times K_{k-m} \times & K_{k-m+1} \times \cdots \times K_k & & \\ U \subseteq & & L_1 \quad \times \cdots \times L_m & \times L_{m+1} \times \cdots \times L_\ell & \\ U \circ_m T \subseteq & \underbrace{K_1 \times \cdots \times K_{k-m}}_{A} \times & \underbrace{\qquad\qquad}_{B} & \times \underbrace{L_{m+1} \times \cdots \times L_\ell}_{C} & \end{array}$$

Opět je nejjednodušší si koncept skládání vícečetných relací ilustrovat příkladem.

Příklad 4.9. *Skládání v relační databázi pasažérů a letů u leteckých společností.*

Podívejme se na příklad hypotetické rezervace letů pro cestující, relace T. Jak známo (tzv. codeshare), letecké společnosti si mezi sebou „dělí“ místa v letadlech, takže různé lety (podle kódů) jsou ve skutečnosti realizovány stejným letadlem jedné ze společností. To zase ukazuje relace U.

T :

pasažér	datum	let
Petr	5.11.	OK535
Pavel	6.11.	OK535
Jan	5.11.	AF2378
Josef	5.11.	DL5457
Alena	6.11.	AF2378

U :

datum	let	letadlo
5.11.	OK535	ČSA
5.11.	AF2378	ČSA
5.11.	DL5457	ČSA
6.11.	OK535	AirFrance
6.11.	AF2378	AirFrance

Ptáme-li se nyní, setkají se Petr a Josef na palubě stejného letadla? Případně, čí letadlo to bude? Odpovědi nám dá složení relací $U \circ_2 T$, jak je popsáno výše.

$U \circ_2 T$:

pasažér	letadlo
Petr	ČSA
Josef	ČSA
Pavel	AirFrance
...	...

Zkuste se zamyslet, lze tyto dvě relace skládat ještě jinak? Co by pak bylo významem? □

Navazující studium

Mějte na paměti, že na pojmech množin, relací a funkcí jsou vystavěny prakticky všechny skutečné datové struktury používané v dnešní informatice. Explicitně toto můžete vidět na relačních databázích, ale i na mnoha jiných implicitních výskytech. Mnohem více si nejprve o relacích a poté speciálně o funkcích vysvětlíme v dalších dvou lekcích. Dalším důležitým matematickým datovým typem odvozeným z binárních relací jsou pak grafy probírané od Lekce 7.

5 Ekvivalence, Uspořádané množiny

Úvod

V této lekci pokračujeme rozebíráním relací na množinách jako nástrojů vyjadřujících vztahy mezi objekty. Zaměříme se přitom pouze na relace binární, které nějakým způsobem srovnávají objekty podle jejich vlastností (obvykle ve smyslu „stejný jako“ nebo „lepší/větší než“). Takto vágně opsané binární relace mívají jasné společné znaky, které se pak objevují ve zde uvedených formálních definicích relace ekvivalence a uspořádání.

Co se týče ekvivalencí, lze si je neformálně představit jako rozdělení prvků nosné množiny na „hromádky“, přičemž prvky každé jednotlivé hromádky jsou si navzájem v jistém smyslu stejné. Naopak uspořádání nám již podle svého názvu udává srovnání prvků nosné množiny, neboli které prvky si „stojí lépe“ než jiné.

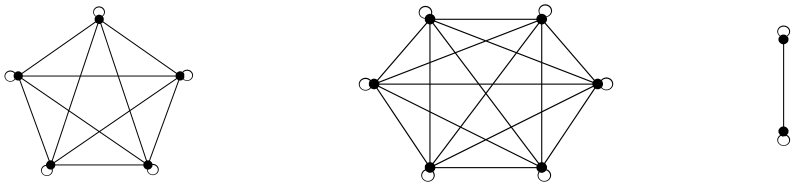
Cíle

Definujeme relace ekvivalence a uspořádání a mnohé další pojmy k nim se vztahující, například rozklady a Hasseovy diagramy. Studující by měli porozumět matematické problematice rozkladů množin a uspořádaných množin a naučit se je správně používat.

5.1 Relace ekvivalence

Nyní se hlouběji podívejme na první specifický typ *binární* relace zmíněný výše: Podle Definice 4.4 je relace $R \subseteq M \times M$ *ekvivalence* právě když R je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto *tři vlastnosti* tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je ekvivalence.

`Komentář:` Jak vypadá *graf relace ekvivalence*? Poměrně příznačně, jak nám ukazuje následující obrázek (všimněte si absence šipek, která je dána symetrií relace).



Neformálně řečeno; ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „*stejné*“.

`Značení`. V případě relace ekvivalence se poměrně často lze setkat s označením jako $\sim$ či $\approx$ místo R. Místo $(x, y) \in R$ se pak píše $x \approx y$.

Příklad 5.1. *Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované následovně a zkoumejme, zda se jedná o ekvivalence:*

* $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y;
* $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou barvu vlasů jako y;
* $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku a stejnou barvu vlasů;
* $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku *nebo* stejnou barvu vlasů.

U kterého body se nejedná o relaci ekvivalence a proč? Je to poslední případ, kdy není splněna tranzitivita. □

Uvedený příklad ukazuje na následující univerzální poznatek, který může platit (a taky platí) pouze pro průnik a nikoliv pro sjednocení.

Tvrzení 5.2. *Nechť R, S jsou dvě relace ekvivalence na stejné množině M. Pak jejich* průnik *$R \cap S$ je opět relací ekvivalence.*

`Důkaz` (náznak): Jelikož reflexivita a symetrie je zřejmá, stačí snadno ověřit platnost tranzitivity na $R \cap S$. Nechť $(a, b), (b, c) \in R \cap S$, pak podle tranzitivity každé samostatné z R, S plyne $(a, c) \in R$ a zároveň $(a, c) \in S$. □

Příklad 5.3. *Nechť $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je binární relace definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když $|x - y|$ je dělitelné třemi.*

V jakém smyslu jsou zde x a y „stejné“? Dávají stejný zbytek po dělení třemi. □

Příklad 5.4. *Buď R binární relace mezi všemi studenty na přednášce FI:IB000 definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když x i y sedí v první lavici.*

Už na první pohled jde o relaci symetrickou a tranzitivní. Proč se v tomto případě *nejedná* o relaci ekvivalence? Protože není reflexivní pro studenty sedící v dalších lavicích. (Takže si dávejte dobrý pozor na správné pochopení definic.) □

5.2 Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím

Náplní následující části výkladu je ukázat jiný přirozený pohled na ekvivalence. Tento nový pohled nám matematicky formalizuje představu ekvivalence jako rozdělení prvků nosné množiny M na „*hromádky*“, přičemž prvky každé jednotlivé hromádky jsou si navzájem v jistém smyslu „stejné“.

Definice 5.5. ***Rozklad množiny.*** Nechť M je množina.
Rozklad (na) M je množina podmnožin $\mathcal{N} \subseteq 2^M$ splňující následující tři podmínky:

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$ (tj. každý prvek $\mathcal{N}$ je neprázdná podmnožina M);
- pokud $A, B \in \mathcal{N}$, pak buď $A = B$ nebo $A \cap B = \emptyset$;
- $\bigcup_{A \in \mathcal{N}} A = M$.

Prvkům $\mathcal{N}$ se také říká *třídy rozkladu*.

`Komentář:`

* Buď $M = \{a, b, c, d\}$. Pak $\mathcal{N} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ je rozklad na M.
* Nechť $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 0\}$, $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 1\}$, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 2\}$. Pak $\mathcal{N} = \{A_0, A_1, A_2\}$ je rozklad všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ podle zbytkových tříd.

Každý rozklad $\mathcal{N}$ na M jednoznačně určuje jistou ekvivalenci $R_{\mathcal{N}}$ na M:

Věta 5.6. *Nechť M je množina a $\mathcal{N}$ rozklad na M. Nechť $R_{\mathcal{N}} \subseteq M \times M$ je relace na M definovaná takto*

$$(x, y) \in R_{\mathcal{N}} \text{ právě když existuje } A \in \mathcal{N} \text{ taková, že } x, y \in A.$$

Pak $R_{\mathcal{N}}$ je ekvivalence *na M.*

Důkaz: Dokážeme, že $R_{\mathcal{N}}$ je *reflexivní, symetrická a tranzitivní* (*Definice 4.4*).

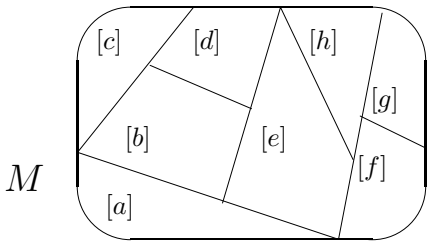
- Reflexivita: Buď $x \in M$ libovolné. Jelikož $\mathcal{N}$ je rozklad na M, musí existovat $A \in \mathcal{N}$ takové, že $x \in A$ (jinak spor se třetí podmínkou z *Definice 5.5*). Proto $(x, x) \in R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní.
- Symetrie: Nechť $(x, y) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ pak existuje $A \in \mathcal{N}$ taková, že $x, y \in A$. To ale znamená, že také $(y, x) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je symetrická.
- Tranzitivita: Nechť $(x, y), (y, z) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ existují $A, B \in \mathcal{N}$ takové, že $x, y \in A$ a $y, z \in B$. Jelikož $A \cap B \neq \emptyset$, podle druhé podmínky z *Definice 5.5* platí $A = B$. Tedy $x, z \in A = B$, proto $(x, z) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$. □

Každá ekvivalence R na M naopak jednoznačně určuje jistý rozklad M/R na M:

Věta 5.7. *Nechť M je množina a R ekvivalence na M. Pro každé $x \in M$ definujeme množinu*

$$[x] = \{y \in M \mid (x, y) \in R\}.$$

Pak $\{[x] \mid x \in M\}$ je rozklad *na M, který značíme M/R a čteme „rozklad M podle R“.*



Důkaz: Dokážeme, že M/R splňuje podmínky *Definice 5.5*.

- Pro každé $[x] \in M/R$ platí $[x] \neq \emptyset$, neboť $x \in [x]$.
- Nechť $[x], [y] \in M/R$. Ukážeme, že pokud $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, pak $[x] = [y]$.

  Jestliže $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existuje $z \in M$ takové, že $z \in [x]$ a $z \in [y]$. Podle definice $[x]$ a $[y]$ to znamená, že $(x, z), (y, z) \in R$. Jelikož R je symetrická a $(y, z) \in R$, platí $(z, y) \in R$. Jelikož $(x, z), (z, y) \in R$ a R je tranzitivní, platí $(x, y) \in R$. Proto také $(y, x) \in R$ (opět ze symetrie R). Nyní dokážeme, že $[y] = [x]$:

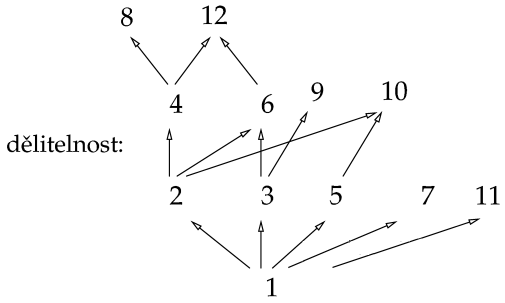
  - „$[x] \subseteq [y]$“: Nechť $v \in [x]$. Pak $(x, v) \in R$ podle definice $[x]$. Dále $(y, x) \in R$ (viz výše), tedy $(y, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[y]$ znamená, že $v \in [y]$.
  - „$[y] \subseteq [x]$“: Nechť $v \in [y]$. Pak $(y, v) \in R$ podle definice $[y]$. Dále $(x, y) \in R$ (viz výše), tedy $(x, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[x]$ znamená, že $v \in [x]$.
- Platí $\bigcup_{[x] \in M/R} [x] = M$, neboť $x \in [x]$ pro každé $x \in M$. □

5.3 Uspořádání a uspořádané množiny

Přirozený vágní pojem *porovnání/uspořádání* objektů má také svou přesnou matematickou definici: Podle Definice 4.4 je relace $R \subseteq M \times M$ *(částečné) uspořádání* právě když R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Tyto *tři vlastnosti* tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je uspořádáním.

`Komentář:` Neformálně řečeno: uspořádání je taková relace $R \subseteq M \times M$, kde $(x, y) \in R$ právě když x je v nějakém smyslu „*menší nebo rovno*“ než y. Mohou ovšem existovat taková $x, y \in M$, kde neplatí $(x, y) \in R$ ani $(y, x) \in R$. (Pak říkáme, že x a y jsou *nesrovnatelné*.)

Jak *názorně* zobrazit (částečné) uspořádání? Příklad zjednodušeného zakreslení (jsou vynechány šipky vyplývající z reflexivity a tranzitivity, viz Oddíl 5.4) je zde:



Všimněte si, že je někdy zvykem „větší“ prvky kreslit nad ty „menší“.

`Značení`. Pro větší přehlednost se relace uspořádání často značí symboly jako $\sqsubseteq$ či $\preceq$ místo prostého R. I my tak často budeme psát třeba $x \preceq y$ místo $(x, y) \in R$.

`Poznámka`: Zajisté jste se již neformálně setkali s „neostrým“ uspořádáním čísel $\leq$ a „ostrým“ uspořádáním $<$. Všimněte si dobře, že námi definované uspořádání je vždy „neostré“. Pokud byste naopak chtěli definovat „*ostré*“ uspořádání, mělo by vlastnosti *ireflexivní*, antisymetrické a tranzitivní. (Příliš se však tato varianta nepoužívá.) Nadále budeme pracovat pouze s neostrým uspořádáním, ale smyčky vyplývající z reflexivity a případně i tranzitivity budeme pro větší přehlednost v obrázcích vynechávat.

Uspořádaná množina

Matematicky důležitějším pojmem než samotná relace uspořádání je uspořádaná množina, neboli soubor prvků s pevně zvoleným uspořádáním na nich.

Definice 5.8. ***Uspořádaná množina*** je dvojice $(M, \preceq)$,
kde M je množina a $\preceq$ je (částečné) uspořádání na M.

`Definice`: Uspořádání $\preceq$ na M je *lineární* (nebo také *úplné*), pokud každé dva prvky M jsou v $\preceq$ srovnatelné.

Příklady uspořádaných množin

Příklad 5.9. *Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace uspořádání $R \subseteq M \times M$ definované následovně (jedná se vždy o uspořádání?):*

* $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y;
* $(x, y) \in R$ právě když y má alespoň takovou výšku jako x;
* $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo.

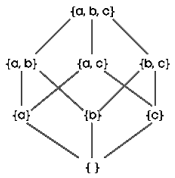
Ano, i v posledním bodě se jedná o uspořádání. (Dobře si promyslete, proč. Které dvojice jsou vůbec porovnatelné?) □

Příklad 5.10. *Další ukázky uspořádaných množin následují zde:*

∗ $(\mathbb{N}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina, kde $\leq$ má „obvyklý“ význam.

∗ $(\mathbb{N}, |\,)$, kde $a|b$ je relace dělitelnosti „a dělí b“ na přirozených číslech, je uspořádaná množina. Toto uspořádání není lineární.

∗ Buď M množina. Pak $(2^M, \subseteq)$ je uspořádaná množina (říkáme *inkluzí*). Které dvojice jsou v uspořádání inkluzí *nesrovnatelné*?



□

`Komentář:` Zamyslete se také, jak vypadá relace dělitelnosti na celých (tj. i záporných) číslech. Proč se už nejedná o uspořádání? Blíže viz konec Oddílu 5.4.

Užitečnou dovedností je umět popsat uspořádání „větší množiny“ pomocí „malých“ složek. Neformálně lze toto uvést následujícími příklady:

Příklad 5.11. *Uspořádání „*po složkách*“.*

Nechť $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$ jsou uspořádané množiny. Definujme binární relaci $\sqsubseteq$ na $A \times B$ předpisem

$$(a, b) \sqsubseteq (a', b') \quad \text{právě když} \quad a \leq_A a' \text{ a } b \leq_B b'.$$

Pak $(A \times B, \sqsubseteq)$ je uspořádaná množina. Toto uspořádání se nazývá „po složkách“. □

Příklad 5.12. Lexikografické *uspořádání.*

Nechť $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$ jsou uspořádané množiny. Definujme binární relaci $\preceq$ na $A \times B$ předpisem

$$(a, b) \preceq (a', b') \quad \text{právě když} \quad \text{buď } a \leq_A a' \text{ a } a \neq a', \text{ nebo } a = a' \text{ a } b \leq_B b'.$$

Pak $(A \times B, \preceq)$ je uspořádaná množina. Navíc pokud $\leq_A$ i $\leq_B$ jsou lineární, je i $\preceq$ lineární. Toto uspořádání se nazývá lexikografické. □

`Fakt`: Jsou-li $(A_1, \leq_1), \cdots, (A_n, \leq_n)$ uspořádané množiny, kde $n \geq 2$, pak množinu $A_1 \times \cdots \times A_n$ lze uspořádat třeba *po složkách* nebo *lexikograficky*.

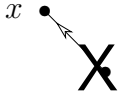
Všimněte si, že lexikograficky se například řadí slova ve slovníku...

5.4 Další pojmy uspořádaných množin

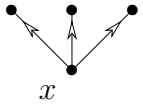
K tématu uspořádaných množin se vztahuje množství drobných pojmů, které potkáte v různých oblastech matematiky i informatiky.

Definice 5.13. Nechť $(M, \preceq)$ je uspořádaná množina.

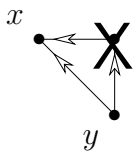
- $x \in M$ je *minimální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že jestliže $y \preceq x$, pak $x \preceq y$. (Tj. x je minimální právě když neexistuje žádný prvek ostře menší než x.)



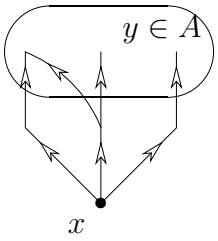
- $x \in M$ je *maximální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že jestliže $x \preceq y$, pak $y \preceq x$. (Tj. x je maximální právě když neexistuje žádný prvek ostře větší než x.)
- $x \in M$ je *nejmenší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $x \preceq y$.



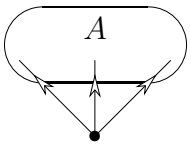
- $x \in M$ je *největší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $y \preceq x$.
- $x \in M$ *pokrývá* $y \in M$ právě když $x \neq y$, $y \preceq x$ a neexistuje žádné $z \in M$ takové, že $x \neq z \neq y$ a $y \preceq z \preceq x$.



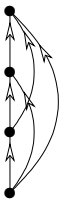
- $x \in M$ je *dolní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $x \preceq y$ pro každé $y \in A$.



- $x \in M$ je *horní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $y \preceq x$ pro každé $y \in A$.
- $x \in M$ je *infimum* množiny $A \subseteq M$ právě když x je největší dolní závora (mez) množiny A.



- $x \in M$ je *supremum* množiny $A \subseteq M$, právě když x je nejmenší horní závora (mez) množiny A.
- $A \subseteq M$ je *řetězec* v uspořádání $\preceq$ právě když $(A, \preceq)$ je *lineárně* uspořádaná množina.



`Komentář:` Tuto dlouhou definici se sluší poněkud neformálně okomentovat. Za prvé, s pojmy nejmenšího a největšího prvku jste se už intuitivně setkali mnohokrát, ale (matematicky slabší) pojmy minimálního a maximálního působí někdy problémy. Zapamatujte si proto dobře, že minimálních prvků může mít množina několik, jsou to prostě všechny ty "vespod", ale nejmenší prvek existuje nejvýše jeden a je to pouze ten *unikátní* minimální prvek množiny. Stejně pro maximální...

Další poznámka se vztahuje k infimu a supremu množiny. Jak jsme napsali (a asi totéž znáte z matematické analýzy), množina nemusí mít nejmenší ani největší prvek, ale v mnoha

případech je lze "nahradit" po řadě infimem a supremem, které hrají v jistých ohledech podobnou roli. Avšak ani supremum a infimum nemusí vždy existovat.

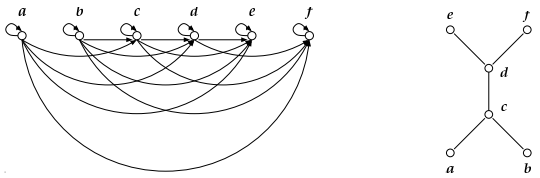
Dejte si pozor; některé uvedené definice mají dosti „netriviální chování" na *nekonečných* množinách. Proto je budeme obvykle uvažovat jen nad konečnými množinami.

Příklad 5.14. *Proč má každá uspořádaná množina nejvýše jeden největší prvek?*

Tvrzení dokážeme sporem: Nechť m i n jsou největší prvky uspořádané množiny $(M, \preceq)$. Pak podle Definice 5.13 platí $n \preceq m$ i $m \preceq n$ zároveň. Ovšem jelikož uspořádání musí být antisymetrické, pak platí $m = n$ a největší prvek je jen jeden. □

Hasseovské diagramy

Motivací zavedení tzv. Hasseovských diagramů uspořádaných množin jsou přehlednější „obrázky" než u grafů relací. Například si srovnejte následující ukázky:

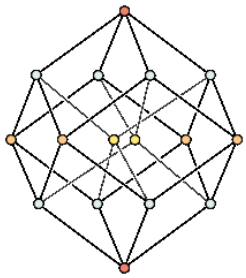


Zjednodušení a konvence přinesené následující definicí jsme ostatně měli možnost vidět už na některých z předchozích ilustračních obrázků uspořádání.

`Definice`: *Hasseovský diagram* konečné uspořádané množiny $(M, \preceq)$ je jeho (jednoznačné) grafické znázornění získané takto:

* Do první „horizontální vrstvy" zakreslíme body odpovídající minimálním prvkům $(M, \preceq)$. (Tj. které *nepokrývají* nic. Pojem pokrývání prvku najdete v Definici 5.13.)
* Máme-li již zakreslenu vrstvu i, pak do vrstvy $i + 1$ (která je „nad" vrstvou i) zakreslíme všechny nezakreslené prvky, které *pokrývají pouze* prvky vrstev $\leq i$. Pokud prvek x vrstvy $i+1$ pokrývá prvek y vrstvy $\leq i$, spojíme x a y neorientovanou hranou (tj. „čárou").

Příklad 5.15. *Relaci inkluze na čtyřprvkové množině* $\{a, b, c, d\}$ *zakreslíme Hasseovským diagramem takto:*



□

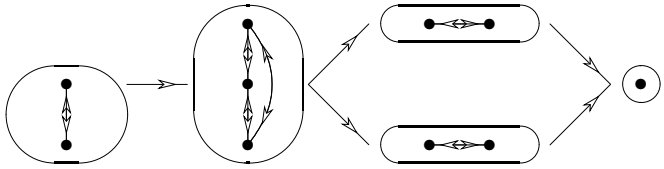
`Komentář:` Jak vidíme, v Hasseovském diagramu „*vynecháváme*" ty hrany relace $\preceq$, které vyplývají z *reflexivity či tranzitivity*. To celý obrázek výrazně zpřehlední, a přitom nedochází ke ztrátě informace. Lze vynechat i šipky na hranách, neboť dle definice všechny míří „vzhůru". Také pojem „*vrstvy*" v definici je jen velmi neformální, důležité je, že větší (pokrývající) prvky jsou *nad menšími* (pokrývanými).

5.5 Relace předuspořádání

Mimo uspořádání chápaných striktně antisymetricky se v praxi často setkáme se „skorouspořádáními“, ve kterých některé očividně různé prvky stojí na stejné úrovni naší preference. Jak třeba uspořádáte různé počítače podle výkonu nebo studenty podle známek A–E? To matematicky podchytí následující pojem.

`Definice`: Relace $R \subseteq M \times M$ je *předuspořádání* (také *kvaziuspořádání*, nebo *polouspořádání*) právě když R je *reflexivní* a *tranzitivní*.

> `Komentář:` Rozdíl mezi uspořádáním a předuspořádáním je (neformálně řečeno!) v tom, že u předuspořádání srovnáváme prvky podle kritéria, které není pro daný prvek jedinečné. V předuspořádání takto mohou vznikat „*balíky*“ (třídy) se stejnou hodnotou kritéria, což schematicky ilustrujeme na následujícím obrázku.



Důležitým poznatkem je, že předuspořádání se „až tak moc“ neliší od dřívějšího uspořádání – přirozeně totiž odvodíme následující:

Věta 5.16. *Je-li $\sqsubseteq$ předuspořádání na M, můžeme definovat relaci $\sim$ na M předpisem*

$$x \sim y \quad \textit{právě když} \quad x \sqsubseteq y \ a \ y \sqsubseteq x.$$

Pak $\sim$ je ekvivalence na M, která se nazývá jádro předuspořádání $\sqsubseteq$.

Na rozkladu $M/\sim$ pak lze zavést relaci $\preceq$ definovanou takto

$$[x] \preceq [y] \quad \textit{právě když } x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ je uspořádaná množina indukovaná $\sqsubseteq$.

> `Komentář:` Pro ukázku si vezměme relaci dělitelnosti na $\mathbb{Z}$. Pak třeba $-2 \sim 2$. Jádrem zde jsou dvojice čísel stejné absolutní hodnoty.

`Důkaz` (náznak): Tranzitivita a reflexivita relace $\sim$ vyplývá z tranzitivity a reflexivity relace $\sqsubseteq$. Symetrie $\sim$ pak je přímým důsledkem její definice. Tudíž $\sim$ skutečně je relací ekvivalence a $M/\sim$ je platný rozklad nosné množiny.

Tranzitivita a reflexivita relace $\preceq$ se opět dědí z relace $\sqsubseteq$. Její antisymetrie vyplývá následující úvahou: Pokud $[x] \preceq [y]$ a $[y] \preceq [x]$, pak podle naší definice $x \sqsubseteq y$ a $y \sqsubseteq x$, neboli $x \sim y$ a $[x] = [y]$ podle definice tříd rozkladu. Pozor, nejdůležitější částí této větve důkazu je však ještě zdůvodnění, že naše podaná definice vztahu $[x] \preceq [y]$ je korektní, což znamená, že její platnost nezávisí na konkrétní volbě reprezentantů x z $[x]$ a y z $[y]$.

Poslední zmíněné tvrzení dokážeme sporem: Nechť $x, x' \in [x]$ a $y, y' \in [y]$ jsou (možná různí) reprezentanti dvou zkoumaných tříd rozkladu $M/\sim$, pro které však platí $x \sqsubseteq y$ a $x' \sqsupseteq y'$. Podle definice třídy rozkladu je $x \sim y$ a $x' \sim y'$ a z tranzitivity $x \sqsubseteq y \sqsubseteq y' \sqsubseteq x' \sqsubseteq x$ a tudíž $[x] = [y]$ a na volbě reprezentanta skutečně nezáleží. □

Rozšiřující studium

S relacemi ekvivalence i jimi implicitně definovanými rozklady množin se lze setkat tam, kde nějaké objekty "rozdělujeme do přihrádek" podle nějakých sdílených znaků nebo jiných kritérií. Principy takových rozkladů vám zajisté byly intuitivně známy ještě dříve, než jste vůbec slyšeli o matematickém pojmu ekvivalence, v této lekci jsme si je jen uvedli na formálních základech. Toto formální pojetí relací ekvivalence a rozkladů budete potřebovat v různých navazujících předmětech, například u teorie automatů.

I v druhé části lekce se pojednává o látce, kterou určitě čtenáři na intuitivní úrovni znají (vždy umění si věci „uspořádat" je jednou ze základních lidských dovedností). Přesto správné matematické uchopení podstaty uspořádání vyžaduje se prokousat několika nesnadnými formálními definicemi. Všimněte si, že hlavní těžkosti pojmu uspořádané množiny se vztahují k částečným, tedy ne-lineárním, uspořádáním, kdy běžnému lidskému uvažování není zcela intuitivně jasné nakládání s nesrovnatelnými dvojicemi. Ostatně to dobře znáte ze života, kdy seřazujete objekty (výrobky, apod) podle více kritérií a přirozeně tak vyvstávají nesrovnatelné dvojice.

6 Funkce a skládání, Induktivní definice

Úvod

Vraťme se nyní k látce Lekce 4 z pohledu funkcí, které jsou nakonec jen specifickým případem relací. Abstraktní práci s funkcemi si osvětlíme na příkladu permutací a jejich skládání. Kde jste se již intuitivně se skládáním funkcí setkali – jak například spočítáte na kalkulačce výsledek složitějšího vzorce?

*Mimo to se ještě zobecněně vrátíme k problematice „postupných“ (*induktivních a rekurentních*) definic a vztahů. Jedná se vlastně o matematické analogie rekurzivních programů a jejich správné formální pochopení oceníme třeba i při programování samotném.*

Cíle

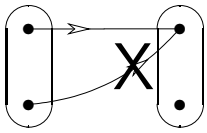
V této lekci definujeme základní vlastnosti funkcí a především popíšeme a podrobně rozebereme skládání relací a návazně skládání funkcí jako relací (jako model nám poslouží permutace). Na závěr se stručně podíváme na problematiku induktivních definic funkcí, coby na rozšíření rekurentních vztahů z Oddílu 3.4.

6.1 Vlastnosti funkcí

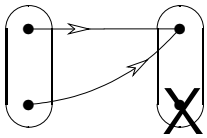
Funkce je podle Definice 4.2 speciálním případem (obvykle binární) relace, majícím pro každou hodnotu levé strany jedinou (funkční) hodnotu pravé strany. V této lekci si řekneme o vlastnostech specifických pro funkce, jako je třeba následující definice.

Definice 6.1. ***Funkce*** (případně parciální funkce) $f : A \to B$ je

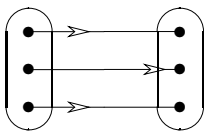
* *injektivní* (nebo také *prostá*) právě když pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$;



* *surjektivní* (nebo také „*na*“) právě když pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$;



* *bijektivní* (vzáj. *jednoznačná*) právě když je injektivní a *současně* surjektivní.



`Komentář:` Následují jiné ukázky vlastností funkcí.

* Funkce $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je surjektivní, ale není prostá.
* Funkce $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ daná předpisem

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{jestliže } x < 0, \\ 2x & \text{jinak} \end{cases}$$

je bijektivní.

* Funkce $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ je bijektivní.
* Funkce $\emptyset : \emptyset \to \{a, b\}$ je injektivní, ale není surjektivní.
* Dokázali byste nalézt bijektivní funkci $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

Inverze funkce

`Komentář:` Příklady inverzí pro relace–funkce (viz Oddíl 4.4).

* Inverzí *bijektivní* funkce $f(x) = x + 1$ na $\mathbb{Z}$ je funkce $f^{-1}(x) = x - 1$.
* Inverzí *prosté* funkce $f(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$ je *parciální* funkce $f^{-1}(x) = \ln x$.
* Funkce $g(x) = x \bmod 3$ *není prostá* na $\mathbb{N}$, a proto její inverzí je „*jen*“ relace $g^{-1} = \{(a, b) \mid a = b \bmod 3\}$. Konkr. $g^{-1} = \{(0,0), (0,3), (0,6), \ldots, (1,1), (1,4), \ldots, (2,2), (2,5), \ldots\}$.

Tvrzení 6.2. *Mějme funkci $f : A \to B$. Pak její inverzní relace f^{-1} je*

a) parciální funkce právě když f je prostá,

b) funkce právě když f je bijektivní.

`Důkaz` vyplývá přímo z definic funkce a inverze relace. □

6.2 Skládání funkcí, permutace

Soustřeďme se nyní na tuto další oblast, kde běžně a přirozeně používáme skládání relací, aniž si to uvědomujeme.

`Fakt`: Mějme zobrazení (funkce) $f : A \to B$ a $g : B \to C$. Pak jejich *složením* coby relací v tomto pořadí vznikne zobrazení $(g \circ f) : A \to C$ definované

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \,.$$

`Komentář:`

* Jak například na běžné kalkulačce vypočteme hodnotu funkce $\sin^2 x$? Složíme (v tomto pořadí) „elementární“ funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$.
* Jak bychom na „elementární“ funkce rozložili aritmetický výraz $2\log(x^2 + 1)$? Ve správném pořadí složíme funkce $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = \log x$ a $f_4(x) = 2x$.
* A jak bychom obdobně vyjádřili složením funkcí aritmetický výraz $\sin x + \cos x$? Opět je odpověď přímočará, vezmeme „elementární“ funkce $g_1(x) = \sin x$ a $g_2(x) = \cos x$, a pak je „složíme“ další funkcí $h(x, y) = x + y$. Vidíme však, že takto pojaté „skládání“ už nezapadá hladce do našeho zjednodušeného formalismu skládání relací.

  Pro nedostatek prostoru si skládání funkcí s více parametry nedefinujeme, ale sami vidíte, že obdobné skládání se v programátorské praxi vyskytuje doslova „na každém rohu“ a ani se nad tím nepozastavujeme.

Skládání permutací

Po zbytek tohoto oddílu se zaměříme na permutace coby speciální případ (bijektivních) zobrazení.

`Definice`: Nechť *permutace* π množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je určena seřazením jejích prvků $(p_1, \ldots, p_n)$. Pak π je zároveň *bijektivním zobrazením* $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ definovaným předpisem $\pi(i) = p_i$. Tudíž lze permutace *skládat jako relace* podle Definice 4.7.

`Poznámka`: Všechny permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ spolu s operací skládání tvoří grupu, zvanou symetrická grupa S_n. Permutační grupy (podgrupy symetrické grupy) jsou velice důležité v algebře, neboť každá grupa je vlastně isomorfní některé permutační grupě.

`Komentář:` Příkladem permutace vyskytujícím se v programátorské praxi je třeba zobrazení $i \mapsto (i + 1) \mod n$ ("inkrement"). Často se třeba lze setkat (aniž si to mnohdy uvědomujeme) s permutacemi při indexaci prvků polí.

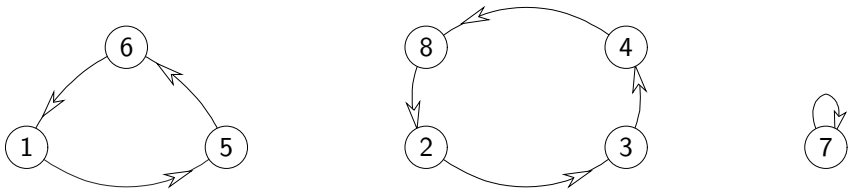
V kontextu pohledu na funkce a jejich skládání coby relací si zavedeme jiný, názornější, způsob zápisu permutací – pomocí jejich cyklů.

`Definice`: Nechť π je permutace na množině A. *Cyklem v* π rozumíme posloupnost $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ různých prvků A takovou, že $\pi(a_i) = a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ a $\pi(a_k) = a_1$.

Jak název napovídá, v zápise cyklu $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ není důležité, kterým prvkem začneme, ale jen dodržení cyklického pořadí. Cyklus v permutaci může mít i jen jeden prvek (zobrazený na sebe).

`Komentář:` Nakreslete si (vámi zvolenou) permutaci π obrázkem, ve kterém vedete šipku vždy od prvku i k prvku $\pi(i)$. Pak uvidíte, že cykly dle naší definice jsou právě cykly tvořené šipkami ve vašem obrázku. S tímto grafickým zobrazením pro vás nebude problém pochopit následující látku.

Například permutaci $(5, 3, 4, 8, 6, 1, 7, 2)$ si lze obrázkem nakreslit takto:



Reprezentace permutací jejich cykly

Věta 6.3. *Každou permutaci π na konečné množině A lze zapsat jako složení cyklů na disjunktních podmnožinách (rozkladu) A.*

`Důkaz`: Vezmeme libovolný prvek $a_1 \in A$ a iterujeme zobrazení $a_2 = \pi(a_1)$, $a_3 = \pi(a_2)$, atd., až se dostaneme „zpět“ k $a_{k+1} = \pi(a_k) = a_1$. Proč tento proces skončí? Protože A je konečná a tudíž ke zopakování některého prvku a_{k+1} musí dojít. Nadto je π prostá, a proto nemůže nastat $\pi(a_k) = a_j$ pro $j > 1$. Takto získáme první cyklus $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$.

Induktivně pokračujeme s hledáním dalších cyklů ve zbylé množině $A' = A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$, dokud nezůstane prázdná. V tomto indukčním kroku si musíme uvědomit, že π omezené na nosnou množinu A' je stále permutací podle definice (neboli žádná prvek z A' se nezobrazí do $\{a_1, \ldots, a_k\}$). □

`Značení` permutace jejími cykly: Nechť se permutace π podle Věty 6.3 skládá z cyklů $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, $\langle b_1, \ldots, b_l \rangle$ až třeba $\langle z_1, \ldots, z_m \rangle$. Pak zapíšeme

$$\pi = (\, \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \, \langle b_1, \ldots, b_l \rangle \ldots \langle z_1, \ldots, z_m \rangle \,) \,.$$

`Komentář:` Primitivní pseudonáhodné generátory v počítačích iterují z náhodného počátku permutaci danou vztahem $i \mapsto (i + p) \mod q$. Je pochopitelné, že tato permutace nesmí obsahovat krátké cykly, lépe řečeno, měla by se skládat z jediného (dlouhého) cyklu. (Pro úplnost, jedná se o permutaci množiny $\{0, 1, \ldots, q-1\}$).

Příklad 6.4. *Ukázka skládání permutací daných svými cykly.*

Vezměme 7-prvkovou permutaci $\pi = (3, 4, 5, 6, 7, 1, 2)$. Ta se skládá z jediného cyklu $\langle 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6\rangle$. Jiná permutace $\sigma = (5, 3, 4, 2, 6, 1, 7)$ se rozkládá na tři cykly $\langle 1, 5, 6\rangle$, $\langle 2, 3, 4\rangle$ a $\langle 7\rangle$. Nyní určíme složení $\sigma \circ \pi$ těchto dvou permutací (už přímo v zápisu cykly):

$$(\langle 1, 5, 6\rangle\langle 2, 3, 4\rangle\langle 7\rangle) \circ (\langle 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6\rangle) = (\langle 1, 4\rangle\langle 2\rangle\langle 3, 6, 5, 7\rangle)$$

(Nezapomínejme, že první se ve složení aplikuje pravá permutace!)
Postup skládání jsme použili následovný: 1 se zobrazí v permutaci vpravo na 3 a pak vlevo na 4. Následně 4 se zobrazí na 6 a pak na 1. Tím „uzavřeme“ první cyklus $\langle 1, 4\rangle$. Dále se 2 zobrazí na 4 a pak hned zpět na 2, tj. má samostatný cyklus. Zbylý cyklus $\langle 3, 6, 5, 7\rangle$ určíme analogicky. □

6.3 Induktivní definice množin a funkcí

Dalším výkladem se vracíme k podstatě množin a funkcí a k jejich popisu. Vzpomeňme si na definici posloupnosti *rekurentním vztahem* z Oddílu 3.4. Přímým zobecněním dřívějších rekurentních definic je následující koncept.

Definice 6.5. ***Induktivní definice*** množiny.
Jedná se obecně o popis (nějaké) množiny M v následujícím tvaru:

- Je dáno několik pevných (*bázických*) prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$.
- Je dán soubor *induktivních pravidel* typu

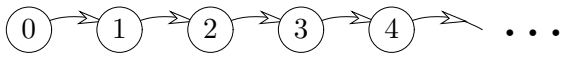
  Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $y \in M$.

  V tomto případě je y typicky funkcí $y = f_i(x_1, \ldots, x_\ell)$.

Pak naše *induktivně definovaná množina* M je určena jako nejmenší (inkluzí) množina vyhovující těmto pravidlům.

`Komentář:` Několik ukázek...

- Pro nejbližší příklad induktivní definice se obrátíme na množinu všech přirozených čísel, která je formálně zavedena následovně.
  - $0 \in \mathbb{N}$
  - Je-li $i \in \mathbb{N}$, pak také $i + 1 \in \mathbb{N}$.

- Pro každé $y \in \mathbb{N}$ můžeme definovat jinou množinu $M_y \subseteq \mathbb{N}$ induktivně takto:
  - $y \in M_y$
  - Jestliže $x \in M_y$ a $x + 1$ je liché, pak $x + 2 \in M_y$.

  Pak například $M_3 = \{3\}$, nebo $M_4 = \{4 + 2i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
- Dalším příkladem induktivní definice je už známé zavedení *výrokových formulí* z Oddílu 1.5. Uměli byste teď přesně říci, co tam byly bázické prvky a jaká byla induktivní pravidla? A jaká byla v definici formulí role přítomných závorek? K tomu se blíže vyjádříme v Definici 6.6.

Jednoznačnost induktivních definic

`Definice`: Řekneme, že daná induktivní definice množiny M je *jednoznačná*, právě když každý prvek M lze odvodit z bázických prvků pomocí induktivních pravidel právě *jedním způsobem*.

`Komentář:` Definujme například množinu $M \subseteq \mathbb{N}$ induktivně takto:
- $2, 3 \in M$
- Jestliže $x, y \in M$ a $x \leq y$, pak také $x^2 + y^2$ a $x \cdot y$ jsou prvky M.

Proč tato induktivní definice není jednoznačná? Například číslo $8 \in M$ lze odvodit způsobem $8 = 2 \cdot (2 \cdot 2)$, ale zároveň zcela jinak $8 = 2^2 + 2^2$.

V čem tedy spočívá důležitost jednoznačných induktivních definic množin? Je to především v dalším možném využití induktivní definice množiny jako „základny“ pro odvozené vyšší definice, viz následující Definice 6.6 a třeba doplňková Věta 6.9. Stručně a neformálně řečeno, hlavní role jednoznačnosti induktivní definice je v možnosti pak přiřadit prvkům této induktivní množiny nějaký „jednoznačný význam“.

Induktivně definovaná množina povětšinou nemá význam sama o sobě, avšak poskytuje *definiční obor* pro následnou induktivně definovanou funkci:

Definice 6.6. ***Induktivní definice funkce*** z induktivní množiny.
Nechť množina M je dána jednoznačnou induktivní definicí. Pak říkáme, že funkce $\mathcal{F} : M \to X$ je definována *induktivně* (vzhledem k induktivní definici M), pokud je řečeno:

- Pro každý z bázických prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ je určeno $\mathcal{F}(a_i) = c_i$, kde c_i je konstanta.
- Pro každé induktivní pravidlo typu
  “Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $f(x_1, \ldots, x_\ell) \in M$”
  je definováno
  $$\mathcal{F}\big(f(x_1, \ldots, x_\ell)\big) \text{ na základě hodnot } \mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_\ell).$$

`Komentář:` Ilustrujme si induktivní definici funkce dětskou hrou na „tichou poštu“. Definičním oborem je řada sedících hráčů, kde ten první je bázickým prvkem a každý následující (mimo posledního) odvozuje hráče sedícího hned za ním jako další prvek hry. Hodnotou bázického prvku je první (vymyšlené) posílané slovo. Induktivní pravidlo pak následujícímu hráči přiřazuje slovo, které je odvozeno ze („zkomolením“) slova předchozího hráče. Výsledkem hry pak je hodnota–slovo posledního hráče.

Pro další příklad se podívejme třeba do manuálových stránek unixového příkazu `test EXPRESSION`:

```
EXPRESSION is true or false and sets exit status.  It is one of:
 ( EXPRESSION )               EXPRESSION is true
 ! EXPRESSION                 EXPRESSION is false
 EXPRESSION1 -a EXPRESSION2   both EXPRESSION1 and EXPRESSION2 are true
 EXPRESSION1 -o EXPRESSION2   either EXPRESSION1 or EXPRESSION2 is true
 [-n] STRING                  the length of STRING is nonzero
 STRING1 = STRING2            the strings are equal
   ......
```

Vidíte, jak tato ukázka koresponduje s Definicí 6.6 ? No, ne úplně, poněkud problematická je otázka jednoznačnosti této definice – jednoznačnost není vynucena (jen umožněna) syntaktickými pravidly, jinak je pak dána nepsanými konvencemi implementace příkazu. To je pochopitelně z matematického hlediska velmi špatně, ale přesto jde o pěknou ukázku z praktického života informatika.

Induktivní definice se „strukturální“ indukcí

Závěrem ještě doplňkově zařazujeme malou ukázku, kterak přirozeně zkombinovat induktivní definice s „pokročilou formou matematické indukce“ v dokazování, s tzv. *strukturální indukcí*.

Příklad 6.7. *Jednoduché aritmetické výrazy a jejich význam.*

Nechť je dána abeceda $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\odot,\oplus,(,)\}$. Definujme množinu *jednoduchých výrazů* $SExp \subseteq \Sigma^*$ induktivně takto:

- Dekadický zápis každého přirozeného čísla $\mathbf{n}$ je prvek $SExp$.
- Jestliže $x, y \in SExp$, pak také $(x) \odot (y)$ a $(x) \oplus (y)$ jsou prvky $SExp$.
- Jak vidíme, díky nucenému závorkování je tato induktivní definice jednoduchých výrazů (nikoliv jejich „hodnot“) *jednoznačná*.

Tímto jsme aritmetickým výrazům přiřadili jejich „formu“, tedy *syntaxi*.

Pro přiřazení „významu“, tj. *sémantiky* aritmetického výrazu, následně definujme funkci $Val : SExp \to \mathbb{N}$ induktivně takto:

- Bázické prvky: $Val(\mathbf{n}) = n$, kde $\mathbf{n}$ je dekadický zápis přirozeného čísla n.
- První induktivní pravidlo: $Val((x) \oplus (y)) = Val(x) + Val(y)$.
- Druhé induktivní pravidlo: $Val((x) \odot (y)) = Val(x) \cdot Val(y)$.

Co je tedy správným významem („*hodnotou*“) uvedených aritmetických výrazů? (Příklad 6.8) □

Příklad 6.8. *Důkaz správnosti přiřazeného „významu“* $Val : SExp \to \mathbb{N}$.

> **Věta**. *Pro každý výraz $s \in SExp$ je hodnota $Val(s)$ z Příkladu 6.7 číselně rovna výsledku vyhodnocení výrazu s podle běžných zvyklostí aritmetiky.*

Jelikož pojednáváme o induktivně definované funkci Val, je přirozené pro důkaz jejích vlastností aplikovat *matematickou indukci*. Na rozdíl od dříve probíraných příkladů zde nevidíme žádný celočíselný „parametr n“, a proto si jej budeme muset nejprve definovat. Naši indukci tedy povedeme podle „délky ℓ odvození výrazu s“ definované jako *počet aplikací induktivních pravidel* potřebných k odvození $s \in SExp$.

`Důkaz`: V *bázi indukce* ověříme vyhodnocení bázických prvků, kteréžto jsou zde dekadické zápisy přirozených čísel. Platí $Val(\mathbf{n}) = n$, což skutečně odpovídá zvyklostem aritmetiky.

V *indukčním kroku* se podíváme na vyhodnocení $Val((x) \oplus (y)) = Val(x) + Val(y)$. Podle běžných zvyklostí aritmetiky by hodnota $Val((x) \oplus (y))$ měla být rovna *součtu* vyhodnocení *výrazu* x, což je podle indukčního předpokladu rovno $Val(x)$ (x má zřejmě kratší délku odvození), a vyhodnocení *výrazu* y, což je podle indukčního předpokladu rovno $Val(y)$. Takže skutečně $Val((x) \oplus (y)) = Val(x) + Val(y)$.

Druhé pravidlo $Val((x) \odot (y))$ se dořeší analogicky. □

Dodatek: důkaz pro normální tvar formule

V Oddíle 1.5 jsme stručně zavedli výrokovou matematickou logiku a výrokové formule. Nyní si snadno můžeme všimnout, že jak definice syntaxe, tak i definice sémantiky výrokové logiky jsou induktivní ve smyslu (po řadě) Definic 6.5 a 6.6. Také Metoda 1.18

pro převod formule do normálního tvaru je induktivní, a proto je na místě následující ilustrativní ukázka důkazu strukturální indukcí:

Věta 6.9. *Pro libovolnou výrokovou formuli φ platí (viz Metoda 1.18), že*

a) $\mathcal{F}(\varphi)$ je ekvivalentní formule k φ v normálním tvaru

b) a $\mathcal{G}(\varphi)$ je formule v normálním tvaru ekvivalentní negaci $\neg\varphi$.

`Důkaz` povedeme *indukcí ke struktuře formule*, neboli indukci povedeme podle „délky“ ℓ – počtu aplikací induktivních pravidel při sestavování formule φ.

- Báze indukce ($\ell = 0$): Pro všechny atomy, tj. výrokové proměnné, zřejmě platí, že $\mathcal{F}(A) = A$ je ekvivalentní A a $\mathcal{G}(A) = \neg A$ je ekvivalentní $\neg A$.
- V indukčním kroku předpokládejme, že a) i b) platí pro všechny formule φ délky nejvýše ℓ. Vezmeme si formuli ψ délky $\ell + 1$, která je utvořená jedním z následujících způsobů:
  - $\psi \equiv \neg\varphi$ ($\equiv$ je „definiční rovnítko“ pro formule). Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi) = \mathcal{G}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{G}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní $\neg\varphi = \psi$. Obdobně pro funktor $\mathcal{G}$ vyjádříme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{F}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ a to je dále ekvivalentní $\neg\neg\varphi = \neg\psi$ podle Tvrzení 1.14.
  - $\psi \equiv (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$. Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$. Podle indukčního předpokladu jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ i $\mathcal{F}(\varphi_2)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ_1 a φ_2. Potom i $\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je v normálním tvaru dle definice a podle sémantiky $\Rightarrow$ je ta ekvivalentní formuli $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$.
    Obdobně rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$. Jelikož $\wedge$ je pro nás jen zkratka, výraz dále rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \neg(\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \neg\mathcal{G}(\varphi_2))$. Podle indukčního předpokladu (a dvojí negace) jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ a $\neg\mathcal{G}(\varphi_2)$ po řadě ekvivalentní formulím φ_1 a φ_2. Tudíž nakonec odvodíme, že $\mathcal{G}(\psi)$ je ekvivalentní negaci formule $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, což jsme zde měli dokázat.
  - $\psi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Zde si musíme opět uvědomit, že spojka $\vee$ je pro nás jen zkratka, a přepsat $\psi \equiv (\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$. Potom podle předchozích dokázaných případů víme, že $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je ekvivalentní formuli $(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$, což bylo třeba dokázat. Stejně tak $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$ je podle předchozích případů důkazu ekvivalentní $(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \neg\psi$.
  - $\psi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ a $\psi \equiv (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ už dokončíme analogicky. □

6.4 Uzávěry relací

Posledním bodem našeho výkladu je vysvětlení postupu, jak danou relaci můžeme „obohatit“ o zvolenou vlastnost (například proto, že naše data o relaci jsou neúplná a vlastnost je tak poškozena). Toto se pochopitelně týká pouze vlastností, které lze nějak ustanovit prostým přidáním dvojic do existující relace, jak říká následující definice.

`Definice`: Buď V (nějaká) vlastnost binárních relací. Řekneme, že V je *uzavíratelná*, pokud splňuje následující podmínky:

* Pro každou množinu M a každou relaci $R \subseteq M \times M$ existuje alespoň jedna relace $S \subseteq M \times M$, která má vlastnost V a pro kterou platí $R \subseteq S$.

* Nechť I je množina a nechť $R_i \subseteq M \times M$ je relace mající vlastnost V pro každé $i \in I$. Pak relace $\bigcap_{i \in I} R_i$ má vlastnost V.

`Fakt`: Libovolná kombinace vlastností *reflexivita, symetrie, tranzitivita* je uzavíratelná vlastnost. Ireflexivita a antisymetrie nejsou uzavíratelné vlastnosti.

Věta 6.10. *Nechť V je uzavíratelná vlastnost binárních relací. Buď M množina a R libovolná binární relace na M. Pak pro množinu všech relací $S \supseteq R$ na M majících vlastnost V existuje infimum R_V (vzhledem k množinové inkluzi), které samo má vlastnost V.*

`Definice`: Tuto „nejmenší“ relaci R_V s vlastností V nazýváme *V-uzávěr* relace R.

Zmíněný V-uzávěr relace je vlastně daný induktivní definicí (viz Definice 6.5), kde báze je původní relace a induktivní pravidla odpovídají vlastnosti V.

Tvrzení 6.11. Nechť R je binární relace na M. Pak platí následující poznatky.

* *Reflexivní uzávěr* R je přesně relace $R \cup \{(x,x) \mid x \in M\}$.

* *Symetrický uzávěr* R je přesně relace $\overset{\leftrightarrow}{R} = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ nebo } (y,x) \in R\}$.

* *Tranzitivní uzávěr* R je přesně relace $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, kde $\mathcal{T}$ je funkce, která pro každou binární relaci S vrátí relaci

$$\mathcal{T}(S) = S \cup \{(x,z) \mid \text{ existuje } y \text{ takové, že } (x,y),(y,z) \in S\}$$

  a $\mathcal{T}^i = \underbrace{\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{i}$ je i-krát iterovaná aplikace funkce $\mathcal{T}$.

* Reflexivní a tranzitivní uzávěr R je přesně relace $R^* = Q^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R.

* Reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr R (tj. nejmenší ekvivalence obsahující R) je přesně relace $(\overset{\leftrightarrow}{Q})^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R.

* Na pořadí aplikování uzávěrů vlastností záleží! (Zhruba řečeno, tranzitivní uzávěr aplikujeme coby poslední.)

`Komentář:` Význam reflexivních a symetrických uzávěrů je z předchozího docela zřejmý. Význam tranzitivního uzávěru R^+ je následovný: Do R^+ přidáme všechny ty dvojice (x,z) takové, že v R se lze „dostat po šipkách“ z x do z. Nakreslete si to na papír pro nějakou jednoduchou relaci, abyste význam tranzitivního uzávěru lépe pochopili.

A jak bylo dříve řečeno, antisymetrický uzávěr relace prostě nedává smysl. Například buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto: $R = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pak R^* je běžné lineární uspořádání $\leq$ přirozených čísel.

Příklad 6.12. *Proč při výpočtu tranzitivního uzávěru relace na konečné množině podle vzorce* $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$ *vždy stačí uvažovat konečně mnoho členů tohoto sjednocení?*

Pro odpověď si uvědomme zásadní fakt — pokud $\mathcal{T}^{i+1} = \mathcal{T}^i$, tak už platí $\mathcal{T}^{i+k} = \mathcal{T}^i$ pro všechna přirozená k. Neboli je potřeba sjednotit jen tolik prvních členů, dokud se ony „zvětšují“, což může nastat jen konečně krát nad konečnou množinou. Mimo jiné tak vidíme, že uvedený popis tranzitivního uzávěru je *konstruktivní*. □

Rozšiřující studium

S formalizací pojmu funkce a jejími vlastnostmi se setkáváte především v matematice, avšak například na bijektivní funkce narazíte při ukládání dat při volbě klíče apod. Našim cílem bylo ukázat práci s funkcemi v jejich abstraktní podobě, tj. bez vazby na nějaký konkrétní analytické vzoreček.

Poslední částí látky o množinách a relacích je problematika induktivních definic, které ač ve formálním podání mohou nejprve vypadat nepochopitelně, jsou ve skutečnosti zcela přirozenou popisnou metodou v mnoha aplikačních sférách informatiky a jejich alespoň intuitivní chápání pro vás bude v dalším studiu nezbytné. Schválně, zkuste se podívat zrovna do vaší oblíbené oblasti informatiky, kde všude induktivní definice, *tj. ty odvolávající se rekurzivně samy na sebe pro „menší případy“, najdete (třeba nepřímo).*

7 Pojem grafu, ve zkratce

Úvod

Třebaže grafy *jsou jen jednou z mnoha struktur v matematice a vlastně pouze speciálním případem binárních relací, vydobyly si svou užitečností a názorností důležité místo na slunci. Dá se bez nadsázky říci, že teorie grafů je asi nejvýznamnější součástí soudobé diskrétní matematiky, a proto se jí budeme věnovat po tři následující lekce. Avšak pozor, nepleťme si graf s grafem funkce!*

Neformálně řečeno, graf se skládá z vrcholů *(představme si je jako nakreslené „puntíky“) a z* hran, *které spojují dvojice vrcholů mezi sebou. Své důležité místo v informatice si grafy získaly dobře vyváženou kombinací svých vlastností – snadno pochopitelným názorným nakreslením a zároveň jednoduchým zpracováním na počítačích. Díky těmto vlastnostem se grafy prosadily jako vhodný matematický model pro popis různých vztahů mezi daty a objekty.*

Cíle

Definujeme, co je graf a jaké jsou nejzákladnější grafové pojmy (třeba hrany a stupně, podgrafy, souvislost). Klademe důraz na to, aby se čtenář naučil grafy „uchopit“ a pracovat s nimi, také aby správně viděl „stejnost“ (isomorfismus) grafů. Poté se věnujeme nejjednoduššímu druhu grafů, totiž stromům. Jedná se vesměs o pojmy, které se hojně vyskytují v obvyklých informatických aplikacích grafů.

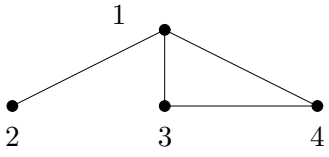
7.1 Definice grafu

Hned na úvod přistoupíme k formální definici grafu. Bude se jednat o definici tzv. *jednoduchého neorientovaného* grafu, který budeme považovat za základní, pokud neřekneme jinak. Svým způsobem navazujeme na reprezentace relací v Oddíle 4.2.

Definice 7.1. ***Graf*** je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$,
kde V je konečná množina *vrcholů* a E je množina *hran* – množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů; tj. $E \subseteq \binom{V}{2}$.

`Značení`: Hranu mezi vrcholy u a v píšeme jako $\{u, v\}$, nebo zkráceně uv. Vrcholy spojené hranou jsou *sousední* a hrana uv *vychází* z vrcholů u a v. Na množinu vrcholů známého grafu G odkazujeme jako na $V(G)$, na množinu hran $E(G)$.

`Komentář:` Grafy se často zadávají přímo názorným obrázkem, jinak je lze formálně zadat výčtem vrcholů a výčtem hran. Například:



$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \Big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\Big\}$$

Na graf se lze dívat také jako na symetrickou ireflexivní relaci, kde hrany tvoří právě dvojice prvků z této relace.

Stupně vrcholů v grafu

Máme-li graf, často nás zajímá, kolik z kterého vrcholu vychází hran-spojnic, neboli kolik má vrchol „sousedů“. Proto jedním z prvních definovaným pojmů bude stupeň vrcholu v grafu.

Definice 7.2. ***Stupněm vrcholu*** v v grafu G
rozumíme počet hran vycházejících z v. Stupeň v v grafu G značíme $d_G(v)$.

`Komentář:` Slovo „vycházející“ zde nenaznačuje žádný směr; je totiž obecnou konvencí u neorientovaných grafů říkat, že hrana vychází z obou svých konců zároveň.

Například v nakreslené ukázce jsou stupně přímo zapsány u vrcholů.

`Definice`: Graf je *d-regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň d.

`Značení`: *Nejvyšší* stupeň v grafu G značíme $\Delta(G)$ a *nejnižší* $\delta(G)$.

Věta 7.3. *Součet stupňů v grafu je vždy sudý, roven dvojnásobku počtu hran.*

`Důkaz`. Při sčítání stupňů vrcholů v grafu započítáme každou hranu dvakrát – jednou za každý její konec. Proto výsledek vyjde sudý. □

Příklad 7.4. *Zodpovězte si sami následující otázky:*

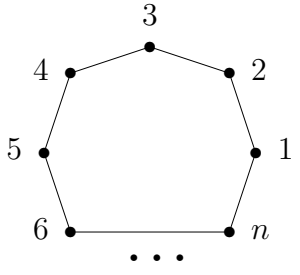
* Kolik hran má graf se 17 vrcholy stupňů 4?
* Existují dva „různé“ grafy se 6 vrcholy stupňů 2? □

Běžné typy grafů

Pro snadnější vyjadřování je zvykem některé běžné typy grafů nazývat popisnými jmény. Jde čistě o věc konvence a autoři se mohou v některých názvech lišit (i přicházet s novými názvy), avšak následujících pět názvů patří k všeobecným základům teorie grafů.

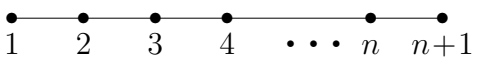
Kružnice délky n má $n \geq 3$ různých vrcholů spojených „do jednoho cyklu“ n hranami:

C_n



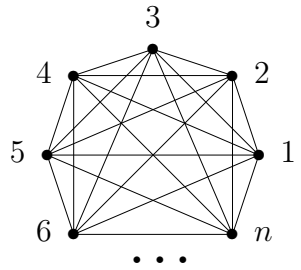
Cesta délky $n \geq 0$ má $n+1$ různých vrcholů spojených „za sebou“ n hranami:

$\boldsymbol{P_n}$



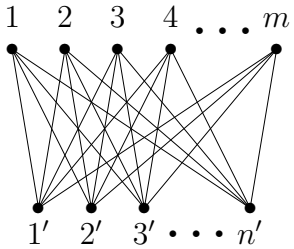
Úplný graf na $n \geq 1$ vrcholech má n různých vrcholů spojených po všech dvojicích (tj. celkem $\binom{n}{2}$ hran):

$\boldsymbol{K_n}$



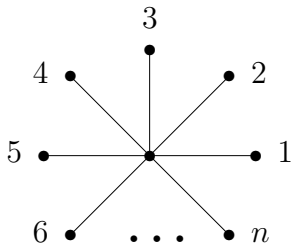
Úplný bipartitní graf na $m \geq 1$ a $n \geq 1$ vrcholech má $m+n$ vrcholů ve dvou skupinách (partitách), přičemž hranami jsou spojeny všechny $m \cdot n$ dvojice z různých skupin:

$\boldsymbol{K_{m,n}}$



Hvězda s $n \geq 1$ ***rameny*** je zvláštní název pro úplný bipartitní graf $K_{1,n}$:

$\boldsymbol{S_n}$



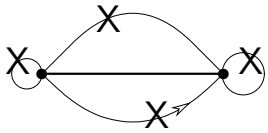
`Definice`: Formálně nechť *kružnice* délky $n \geq 3$ je graf C_n, kde $V(C_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $E(C_n) = \big\{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n\big\} \cup \big\{\{n, 1\}\big\}$. Nechť *cesta* délky $n \geq 0$ je graf P_n, kde $V(P_n) = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ a $E(P_n) = \big\{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n+1\big\}$. Nechť *úplný graf* na $n \geq 1$ vrcholech je K_n, kde $V(K_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $E(K_n) = \big\{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\big\}$. Nechť *úplný bipartitní graf* na $m \geq 1$ a $n \geq 1$ vrcholech je $K_{m,n}$, kde $V(K_{m,n}) = \{1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+n\}$ a $E(K_{m,n}) = \big\{\{i, j\} : 1 \leq i \leq m,\ m+1 \leq j \leq m+n\big\}$.

Příklad 7.5. *Zodpovězte si sami následující otázky:*

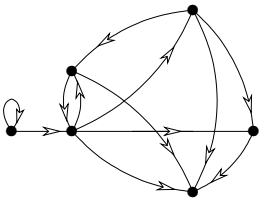
* Pro jakou hodnotu n je úplný graf K_n zároveň cestou?
* Pro jakou hodnotu n je úplný graf K_n zároveň kružnicí?
* Pro jaké hodnoty $m, n > 0$ je úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ zároveň kružnicí?
* Kolik hran musíte přidat do kružnice délky 6, aby vznikl úplný graf na 6 vrcholech?
* Pro jaké hodnoty $m, n > 0$ úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ neobsahuje žádnou kružnici? □

Zmínka o zobecněných grafech

`Komentář:` Všimněme si, že v definici grafu (Def. 7.1) vůbec neuvažujeme možnosti vícenásobných hran (mezi stejnou dvojicí vrcholů) a tzv. „smyček“ (hrana se stejným jedním koncem)—takovému zobecnění by se říkalo *multigraf*; ani zatím nepřisuzujeme hranám žádný směr.



V Lekci 9 si však ještě zavedeme *orientované grafy*, které každé hraně přiřazují jistý směr. Orientované grafy budou mít množinu *orientovaných hran* $A \subseteq V(G) \times V(G)$ a zobrazíme je třeba takto...



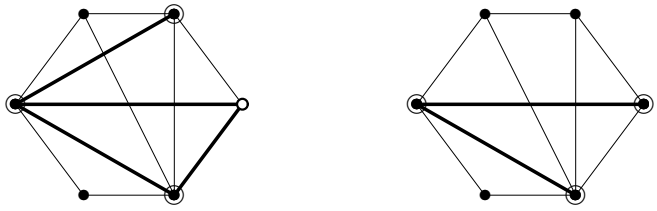
7.2 Podgrafy a Isomorfismus

Dva základní nástroje pro práci s grafy jsou následující; možnost popisovat „část grafu“ (podobně jako podmnožinu množiny, avšak je nutno se vyvarovat nekorektních situací) a poznávat „stejnost“ dvou grafů.

`Definice`: *Podgrafem* grafu G rozumíme libovolný graf H na podmnožině vrcholů $V(H) \subseteq V(G)$, který má za hrany libovolnou podmnožinu hran grafu G majících oba vrcholy ve $V(H)$.

Píšeme $H \subseteq G$, tj. stejně jako množinová inkluze (ale význam je trochu jiný).

`Komentář:` Na následujícím obrázku vidíme zvýrazněné podmnožiny vrcholů hran. Proč se vlevo nejedná o podgraf? Obrázek vpravo už podgrafem je.

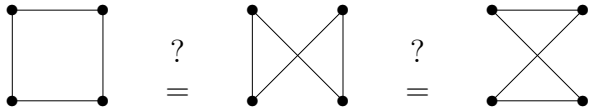


`Definice`: *Indukovaným podgrafem* je podgraf $H \subseteq G$ takový, který obsahuje všechny hrany grafu G mezi dvojicemi vrcholů z $V(H)$.

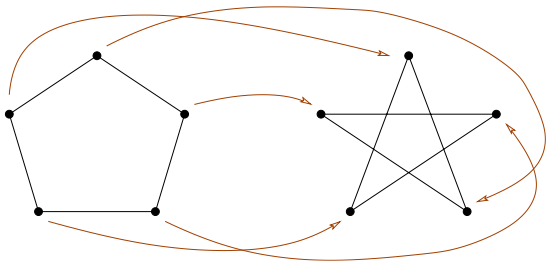
„Stejnost“ grafů

Pozorný čtenář si možná již při čtení předchozího oddílu položil otázku: Co když vezmeme jeden graf (třeba kružnici délky 4) a nakreslíme nebo zapíšeme jej jednou tak, podruhé zase jinak – *je to stále tentýž graf nebo ne*? Viz obrázky dole.

Přísně formálně řečeno, každé další nakreslení jistého grafu, třeba této kružnice C_4, je jiným grafem, ale přitom bychom rádi řekli, že různá nakreslení téhož grafu jsou „stále stejná“. Pro tuto stejnost grafů se vžil pojem *isomorfní grafy*.



Definice 7.6. ***Isomorfismus*** $\simeq$ grafů G a H
je bijektivní (*vzájemně jednoznačné*) zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které platí, že každá dvojice vrcholů $u, v \in V(G)$ je spojená hranou v G právě tehdy, když je dvojice $f(u), f(v)$ spojená hranou v H.



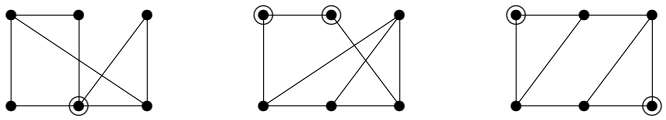
Grafy G a H jsou *isomorfní*, pokud mezi nimi existuje isomorfismus. Píšeme $G \simeq H$.

`Fakt`: Mějme isomorfismus f grafů G a H. Pak platí následující

* G a H mají stejný počet hran,
* f zobrazuje na sebe vrcholy stejných stupňů, tj. $d_G(v) = d_H(f(v))$.

`Komentář:`

U výše zakreslených dvou grafů objevíme isomorfismus velmi snadno – podíváme se, jak si odpovídají vrcholy stejných stupňů.



Naopak v této trojici grafů (se stejnými počty vrcholů i hran) žádné dva nejsou isomorfní. Proč? Ten vlevo má vrchol stupně 4, čímž se od obou zbylých liší. Prostřední graf pak má jediné dva vrcholy stupně 2 spojené hranou, kdežto v pravém takové dva vrcholy spojené nejsou (isomorfismus by je však i s hranou musel zachovat).

Příklad 7.7. *Jsou následující dva grafy isomorfní?*

Pokud mezi nakreslenými dvěma grafy hledáme isomorfismus, nejprve se podíváme, zda mají stejný počet vrcholů a hran. Mají. Pak se podíváme na stupně vrcholů a zjistíme, že oba mají stejnou posloupnost stupňů $2, 2, 2, 2, 3, 3$. Takže ani takto jsme mezi nimi nerozlišili a mohou (nemusejí!) být isomorfní. Dále tedy nezbývá, než zkoušet všechny přípustné možnosti zobrazení isomorfismu z levého grafu do pravého.

Na levém grafu si pro ulehčení všimněme, že oba vrcholy stupně tři jsou si symetrické, proto si bez újmy na obecnosti můžeme vybrat, že nejlevější vrchol prvního grafu, označme jej 1, se zobrazí na nejlevější vrchol $1'$ v druhém grafu (taky stupně tři). Očíslujme zbylé vrcholy prvního grafu $2, \ldots, 6$ v kladném smyslu, jak je ukázáno na následujícím obrázku. Druhý vrchol stupně tři, označený 4, se musí zobrazit na analogický vrchol druhého grafu (pravý spodní). Pak je již jasně vidět, že další sousedé $2, 6$ vrcholu 1 se zobrazí na analogické sousedy $2', 6'$ vrcholu $1'$ v druhém grafu, a stejně je to i se zbylými vrcholy $3, 5$. Výsledný isomorfismus vypadá v odpovídajícím značení vrcholů takto:

□

Abychom mohli s isomorfismem grafů přirozeně pracovat, je potřeba vědět následující fakt:

Věta 7.8. *Relace „být isomorfní“ $\simeq$ na třídě všech grafů je ekvivalencí.*

`Důkaz`. Relace $\simeq$ je reflexivní, protože graf je isomorfní sám sobě identickým zobrazením. Relace je také symetrická, neboť bijektivní zobrazení lze jednoznačně obrátit. Tranzitivita $\simeq$ se snadno dokáže skládáním zobrazení–isomorfismů. □

Důsledkem je, že všechny možné grafy se rozpadnou na *třídy isomorfismu*. V praxi pak, pokud mluvíme o *grafu*, myslíme tím obvykle jeho celou třídu isomorfismu, tj. nezáleží nám na konkrétní prezentaci grafu.

`Komentář:` Je uvedený přístup, tj. zaměňování konkrétního grafu za celou jeho třídu isomorfismu, v matematice neobvyklý? Ne, například už v geometrii jste říkali „čtverec o straně 2“ či „jednotkový kruh“ a podobně, aniž jste měli na mysli konkrétní obrázek, nýbrž celou třídu všech těchto shodných objektů.

Další grafové pojmy

`Definice`: Mějme libovolný graf G.

* Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *kružnice v* G.
* Speciálně říkáme *trojúhelník* kružnici délky 3.
* Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké cestě, říkáme *cesta v* G.
* Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějakému úplnému grafu, říkáme *klika v* G. (Někdy se za kliku považuje pouze takový úplný podgraf, který je maximální vzhledem k uspořádání inkluzí.)

∗ Podmnožině vrcholů $X \subseteq V(G)$, mezi kterými nevedou v G vůbec žádné hrany, říkáme *nezávislá množina X v G*.

∗ Indukovanému podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *indukovaná kružnice v G*.

`Komentář:` Uvažujme následující ukázky grafů:

První z ukázaných grafů například neobsahuje žádný trojúhelník, ale obsahuje kružnici délky 4, dokonce indukovanou. Druhý graf trojúhelník obsahuje a kružnici délky 4 taktéž. První graf obsahuje cestu délky 4 na vrcholech $1, 2, 3, 4, 5$, ale ta není indukovaná. Indukovaná cesta délky 4 v něm je třeba $2, 3, 4, 5, 6$. Druhý graf tyto cesty také obsahuje, ale naopak žádná z nich není indukovaná. První graf má největší kliku velikosti 2 – jedinou hranu, kdežto druhý graf má větší kliku na vrcholech $3, 4, 5$. Největší nezávislá množina u obou grafů má 3 vrcholy $2, 4, 6$.

`Fakt`: Mějme isomorfismus f grafů G a H. Pokud G obsahuje podgraf F, pak H také musí obsahovat podgraf isomorfní F. Obecněji lze tvrdit, že počet podgrafů v grafu G isomorfních zvolenému F je vždy roven takovému počtu v grafu H.

Příklad 7.9. *Jsou následující dva grafy isomorfní?*

Postupovat budeme jako v Příkladě 7.7, nejprve ověříme, že oba grafy mají stejně mnoho vrcholů i stejnou posloupnost stupňů $2, 2, 2, 2, 3, 3$. Pokud se však budeme snažit najít mezi nimi isomorfismus, něco stále nebude vycházet, že? Co nám tedy v nalezení isomorfismu brání? Podívejme se, že v druhém grafu oba vrcholy stupně tři mají svého společného souseda, tvoří s ním trojúhelník. V prvním grafu tomu tak není, první graf dokonce nemá žádný trojúhelník. Proto zadané dva grafy nejsou isomorfní. □

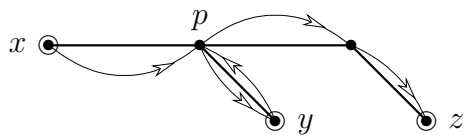
`Poznámka`: Výše uvedené příklady nám ukazují některé cesty, jak poznat (tj. najít nebo vyloučit) isomorfismus dvou grafů. Ty však ne vždy musí fungovat. Čtenář se může ptát, kde tedy najde nějaký univerzální postup pro nalezení isomorfismu? Bohužel vás musíme zklamat, žádný rozumný univerzální postup není znám a zatím platí, že jediná vždy fungující cesta pro nalezení či nenalezení isomorfismu mezi dvěma grafy je ve stylu *vyzkoušejte všechny možnosti* bijekcí mezi vrcholy těchto grafů. (Těch je, jak známo, až $n!$)

7.3 Souvislost grafů, komponenty

Důležitou globální vlastností grafů je *souvislost*, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu. Tuto vlastnost si nyní upřesníme.

Tvrzení 7.10. *Mějme relaci $\sim$ na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $x \sim y$ právě když existuje v G cesta začínající v x a končící v y. Pak $\sim$ je relací ekvivalence.*

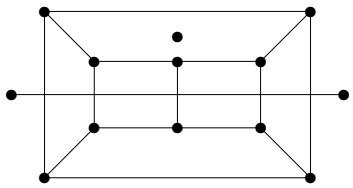
Důkaz. Relace $\sim$ je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou cestou délky 0. Symetrická je také, protože cestu z x do y snadno v neorientovaném grafu obrátíme na cestu z y do x. Důkaz tranzitivity však není takto triviální—pokud vezmeme cestu z x do y a cestu z y do z, tak se tyto dvě cesty mohou protínat i jinde než v y a nelze je prostě „navázat“ na sebe.



Pro důkaz tranzitivity si označme P cestu z x do y a Q cestu z y do z. Pokud označíme $P' \subseteq P$ tu část první cesty z x do prvního vrcholu p v průniku s Q (tj. $p \in V(P) \cap V(Q)$) a označíme $Q' \subseteq Q$ zbytek druhé cesty od p do z, tak $P' \cup Q'$ vždy je cestou z x do z. □

Definice 7.11. ***Komponentami souvislosti*** grafu G nazveme třídy ekvivalence výše popsané (Tvrz. 7.10) relace $\sim$ na $V(G)$. Jinak se také *komponentami souvislosti myslí podgrafy* indukované na těchto třídách ekvivalence.

Komentář: Podívejte se, kolik komponent souvislosti má tento graf:

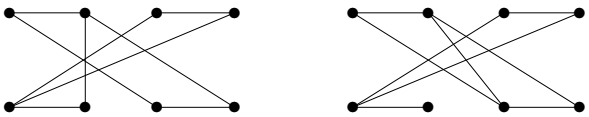


Vidíte v obrázku všechny tři komponenty? Jedna z nich je izolovaným vrcholem, druhá hranou (tj. grafem isomorfním K_2) a třetí je to zbývající.

Definice 7.12. ***Graf G je souvislý*** pokud je G tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy G jsou *spojené cestou*.

Poznámka: Prázdný graf je souvislý a má 0 komponent.

Komentář: Který z těchto dvou grafů je souvislý?



Příklad 7.13. *Dokažme si, že každý souvislý jednoduchý 2-regulární graf G je kružnicí (tj. isomorfní některé kružnici C_n z Oddílu 7.1).*

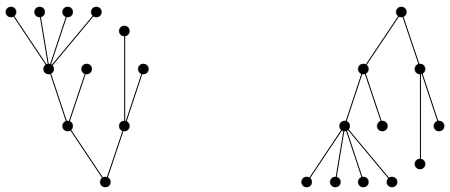
Nechť e je hranou mezi vrcholy u, v grafu G a vezměme graf $G' = G - e$ vzniklý odebráním hrany e. Pokud by u a v náležely v G' různým komponentám souvislosti, tyto

komponenty by každá měla lichý součet stupňů, což nelze podle Věty 7.3. Proto u a v jsou spojeny cestou v G', nechť vrcholy této cesty jsou po řadě značeny $u_1 = u, u_2, \ldots, u_k = v$. Toto značení nám nyní udává isomorfismus zobrazující vrchol u_i na vrchol i z definice kružnice C_k. Nyní už zbývá jen drobnost; dokázat, že jiné vrcholy než $u_1, \ldots, u_k$ v grafu G nejsou. Pokud bychom měli další vrchol x, pak x je spojen cestou Q do u a první vrchol z $V(Q) \cap \{u_1, \ldots, u_k\}$ by měl stupeň větší než 2, spor. □

7.4 Stromy – grafy bez kružnic

Podrobnější studium některých užitečných aspektů grafů začneme u toho nejjednoduššího typu grafu – na *stromech*, jež jsou mimo jiné základem mnoha datových typů používaných v informatice.

`Komentář:`



Charakteristickými znaky stromů je absence kružnic a souvislost...

Definice 7.14. ***Strom*** je jednoduchý souvislý graf T bez kružnic.

`Komentář:` Obecněji *les* je jednoduchý graf bez kružnic (nemusí být souvislý). Komponenty souvislosti lesa jsou stromy. Jeden vrchol bez hran a prázdný graf jsou také stromy.

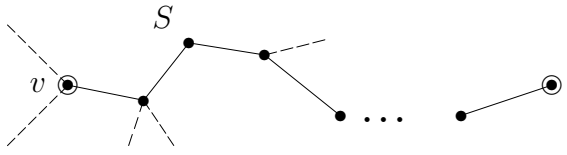
Grafy bez kružnic také obecně nazýváme *acyklické*.

Vlastnosti stromů

Přehled základních vlastností stromů je pro nás zároveň příležitostí si ukázat několik nových hezkých matematických důkazů a naučit se správně zdůvodňovat v oblasti grafů.

Tvrzení 7.15. *Strom s více než jedním vrcholem obsahuje vrchol stupně* 1.

`Důkaz`: Souvislý graf s více než jedním vrcholem nemůže mít vrchol stupně 0. Proto vezmeme libovolný strom T a v něm libovolný vrchol v. Sestrojíme nyní co nejdelší cestu S v T začínající ve v: S začne libovolnou hranou vycházející z v; v každém dalším vrcholu u, do kterého se dostaneme a má stupeň větší než 1, lze pak pokračovat cestu S další novou hranou.



Pokud by se v S poprvé zopakoval některý vrchol, získali bychom *kružnici*, což ve stromě nelze. Proto cesta S musí jednou skončit v nějakém vrcholu stupně 1 v T. □

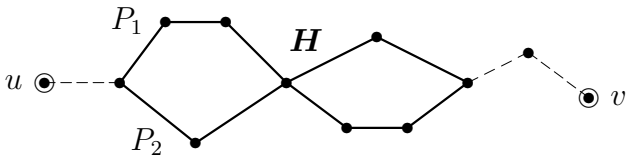
`Komentář:` Zamyslete se, proč v každém stromě s více než jedním vrcholem jsou alespoň dva vrcholy stupně 1 (odpověď je skrytá už v předchozím důkaze). Zároveň si odpovězte, jestli lze tvrdit, že každý strom s více než jedním vrcholem obsahuje tři vrcholy stupně 1.

Věta 7.16. *Strom na n vrcholech má přesně $n-1$ hran pro $n \geq 1$.*

Důkaz: Toto tvrzení dokážeme indukcí podle n. Strom s jedním vrcholem má $n-1=0$ hran. Nechť T je strom na $n>1$ vrcholech. Podle Tvrzení 7.15 má T vrchol v stupně 1. Označme $T'=T-v$ graf vzniklý z T odebráním vrcholu v. Pak T' je také souvislý bez kružnic, tudíž strom na $n-1$ vrcholech. Dle indukčního předpokladu T' má $n-1-1$ hran, a proto T má $n-1-1+1=n-1$ hran. □

Věta 7.17. *Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jediná cesta.*

Důkaz:



Jelikož strom T je souvislý dle definice, mezi libovolnými dvěma vrcholy u, v vede nějaká cesta. Pokud by existovaly dvě různé cesty P_1, P_2 mezi u, v, tak bychom vzali jejich symetrický rozdíl, podgraf $H = P_1 \Delta P_2$ s neprázdnou množinou hran, kde H zřejmě má všechny stupně sudé. Na druhou stranu se však podgraf stromu musí opět skládat z komponent stromů, a tudíž obsahovat vrchol stupně 1 podle Tvrzení 7.15, což je spor. Proto cesta mezi u a v existuje jen jedna. □

Důsledek 7.18. *Přidáním jedné nové hrany do stromu vznikne právě jedna kružnice.*

Důkaz: Nechť mezi vrcholy u, v ve stromu T není hrana. Přidáním hrany $e = uv$ vznikne právě jedna kružnice z e a jediné cesty mezi u, v v T podle Věty 7.17. □

Alternativní charakterizace stromů

Z předchozích tvrzení vyplývá následující alternativní charakterizace stromů, která ukazuje důležitost jich samotných i jako tzv. *koster* obecných grafů (viz Oddíl 8.4).

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

- *minimální souvislý* graf (plyne z Věty 7.17)
- a zároveň *maximální acyklický* graf (plyne z Důsledku 7.18).

Jen tak mimochodem, kolik dokážete nalézt neisomorfních stromů na 4 nebo 5 vrcholech? Vidíte, že jich není mnoho? Nakreslete si je všechny.

7.5 Použití a implementace grafů

Závěrem si v našem studijním textu nastíníme některé základní motivace pro zavedení a použití grafů při popisu a řešení problémů například v informatice.

Příklad 7.19. *Ukázky některých problémů „ze života“ popsatelných grafy. Podotýkáme, že tyto ukázky jsou často velmi zjednodušené (pro jejich lepší přístupnost širokému okruhu čtenářů), ale to neubírá jejich motivačnímu potenciálu.*

- Vyjádření mezilidských vztahů – „mají se rádi“, „kamarádí se“, „nesnesou jeden druhého“, apod:

  Zde jednotlivé osoby tvoří vrcholy grafu a vztahy jsou hranami (často neorientované, ale i orientace je přípustná). Všimněme si coby zajímavosti, jak tento model přirozeně preferuje „párový“ pohled na vztahy – hrany přece spojují jen dvojice vrcholů. Třebaže například vztah „kamarádí se“ může být obecně platný pro větší skupinky lidí než dvojice, stejně se obvykle vyjadřuje klikou v grafu (každí dva v našem družstvu jsou dobří kamarádi...). Tato obecně pojímaná tendence vyjadřovat i *složitější vztahy těmi párovými* je vodou na mlýn použití teorie grafů jako téměř univerzálního vyjadřovacího prostředku v podobných případech.

  Na druhou stranu i teorie grafů disponuje pojmem tzv. *hypergrafu* umožňujícího použití hran libovolné arity (počtu koncových vrcholů), ale rozsah výskytu hypergrafů v teorii i aplikacích je oproti grafům vskutku zanedbatelný.

- Vyjádření závislostí mezi objekty nebo procesy:

  Představme si situace, ve kterých jednotlivé entity (modelované jako vrcholy) závisí na výstupech jiných entit a naopak poskytují výstupy další entitám. Typickým příkladem mohou být závislosti jednotlivých kroků výrobního nebo rozhodovacího procesu. Ty pak vedou k definici *orientovaného grafu* na dané množině vrcholů/entit, tj. použití hran „se šipkami“. Všimněme si, že závislosti často bývají časového charakteru (přičemž směr závislosti je implicitně jasný) a pak je nezbytnou doplňkovou podmínkou *vyloučení výskytu orientovaných cyklů* v modelovém grafu. Na druhou stranu existují i situace, kdy cyklické závislosti jsou dovoleny a mají svůj význam.

  Pro ještě jednu ukázku závislostí z běžného života informatika se podíváme na správu balíčků softwaru například v Linuxových distribucích. V tom případě jsou jednotlivé balíčky vrcholy grafu, jejich vyžadované závislosti popisují odchozí hrany a jejich poskytované vlastnosti jsou příchozími hranami grafu závislostí. Korektní instalace zvoleného balíčku pak řeší problém zahrnutí všech dalších vrcholů „dosažitelných“ ze zvoleného. Vše je navíc komplikováno správou verzí balíčků, ale to už je mimo rámec našeho úvodního slova.

- Modelování technických či dopravních sítí grafy:

  V takových případech bývají vrcholy grafu jednotlivá technická zařízení jako třeba rozvodny, routery, křižovatky a podobně, kdežto hrany jsou tvořeny spojnicemi/vedením mezi vrcholy. Často se zde setkáváme s orientovanými grafy a obecně *multigrafy*. K této problematice se blíže vyjadřuje Lekce 9.

- Vizualizace vztahů a závislostí pro lidského pozorovatele:

  Nejen při řešení cvičných příkladů v naší učebnici, ale i v mnoha reálných aplikacích využívajících grafy jako modely, je velmi potřebné tyto grafy *vizualizovat* (tj. hezky nakreslit) pro lidského pozorovatele. Jedná se obecně o poměrně obtížný úkol, který přesahuje hranice našeho textu. □

Zpracování grafu počítačem

Mějme jednoduchý graf G na n vrcholech a značme vrcholy jednoduše čísly $V(G) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Pro počítačovou implementaci grafu G se nabízejí dva základní způsoby, které budeme implicitně využívat i v některých algoritmech následujících lekcí.

- Implementace *maticí sousednosti*, tj. dvourozměrným polem `g[][]`, ve kterém `g[i][j]=1` znamená hranu mezi vrcholy i a j.
- Implementace *výčtem sousedů*, tj. zjednodušeně opět použitím dvourozměrné pole `h[][]` a navíc pole `d[]` stupňů vrcholů. Zde prvky `h[i][0],h[i][1],...,h[i][d[i]-1]` udávají seznam sousedů vrcholu i.

`Poznámka:` Dávejte si pozor na symetrii hran v implementaci! To znamená, že pokud uložíte hranu `g[i][j]=1`, tak musíte zároveň uložit i hranu `g[j][i]=1`, jinak se dočkáte nepříjemných překvapení. Totéž se týká i seznamů sousedů.

`Komentář:` Implementace maticí sousednosti je hezká svou jednoduchostí. Druhá možnost se však mnohem lépe hodí pro grafy s malým počtem hran, což nastává ve většině praktických aplikací. (Navíc je implementace výčtem sousedů vhodná i pro multigrafy.) Pochopitelně je pak vhodnější místo polí používat různé spojové seznamy. Ke grafům lze do zvláštních polí přidat také *ohodnocení vrcholů a hran* libovolnými čísly či značkami...

Rozšiřující studium

Grafy můžeme v informatice potkat doslova na každém kroku, mimo jiné hojně už v základních kurzech algoritmizace. Nejen že grafy (především stromy) jsou základem mnoha programátorských datových struktur, ale představují i vhodný model pro spoustu praktických problémů. Oněch pár lekcí teorie grafů v našem učebním textu je jen lehkým úvodem, přičemž na FI MU lze pokračovat v jejím studiu v předmětu MA010.

Rozsáhlý matematický úvod do teorie grafů je zahrnut ve skvělé knize Kapitoly z diskrétní matematiky autorů Jiřího Matouška a Jaroslava Nešetřila. Vřele ji doporučujeme jako doplňkový studijní zdroj všem, kteří chtějí lépe pochopit grafy z jejich matematické stránky.

8 Procházení grafu a odvozené úlohy

Úvod

Na rozdíl od předchozí lekce, která se zjednodušeně řečeno zabývala grafy z pohledu matematika, tedy podáním definice a obrázků, nyní se hlouběji podíváme na grafy z algoritmické či programátorské perspektivy. Proto se v prvé řadě podíváme na obecné schéma procházení grafu, *které je základem mnoha užitečných algoritmů na grafech. Poté se hlouběji zaměříme na dvě specifické grafové úlohy – hledání* nejkratší cesty a minimální kostry, *hojně se vyskytující v mnoha praktických obměnách. Na základě obecného schématu si uvedeme jejich jednoduché a velmi efektivní algoritmy.*

Cíle

Zjednodušeně podáme obecné schéma algoritmu procházení grafu. Definujeme poté dvě konkrétní grafové úlohy, hledání nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy a hledání nejmenší kostry, obojí v grafu s hranami ohodnocenými reálnými délkami. Na základě předchozího pak vysvětlíme Dijkstrův algoritmus pro nejkratší cesty a Kruskalův a Jarníkův algoritmus pro minimální kostru.

8.1 Jak obecně projít souvislý graf

S úlohou procházení grafu se svým způsobem setkávají už děti, když hledají cestu z bludiště (jejich naivní postup se dá přirovnat k procházení „do hloubky“). Celý problém má ale mnohem širší záběr a s vhodnou implementací dodatečných lokálních funkcí lze pouhým prohledáním grafu podat odpověď na jiné zajímavé otázky, jako najít nejkratší cestu, minimální kostru, komponenty vyšší souvislosti, apod. Navíc se procházení grafu vyskytuje jako podúloha v jiných algoritmech.

Metoda 8.1. ***Schéma algoritmu pro procházení grafem***
Pro vytvoření co nejobecnějšího schématu si pomůžeme následujícími datovými stavy a pomocnou strukturou:

- *Vrchol* grafu: má stavy ...
  - iniciační – dostane na začátku,
  - nalezený – implicitní stav poté, co jsme jej přes některou hranu nalezli (a odložili ke zpracování později),
  - zpracovaný – poté, co jsme už probrali všechny hrany z něj vycházející,
  - (případně ještě stav „post-zpracovaný“, po dokončení všech jeho následníků).
- *Úschovna*: je pomocná datová struktura (množina s dodatečnými atributy),
  - udržuje odložené, tj. nalezené a ještě nezpracované vrcholy, spolu s dodatečnou specifickou informací.
- *Postup procházení*: zjednodušeně lze říci, že
  - nalézáme z vybraných vrcholů jejich sousedy, ukládáme je do úschovny a
  - pak zase vybíráme a nalézáme dále dokola, až je vše projito.
- Způsob, kterým se vybírají vrcholy z úschovny ke zpracování, určuje variantu algoritmu procházení grafu.

- V prohledávaných vrcholech a hranách se *volitelně* provádějí *dodatečné programové akce pro prohledání a zpracování* našeho grafu.

Samotný algoritmus pak popíšeme v následujících obecných bodech. (V této souvislosti dodáváme, že podrobněji se budeme způsobu formálního matematického zápisu algoritmů věnovat v Lekci 10, ale zde si vystačíme s běžným jazykem.)

Algoritmus 8.2. ***Generické procházení souvislé komponenty*** G ***grafu***

- *Vstup:* Souvislý graf G, daný seznamem vrcholů a seznamy vycházejících hran z každého vrcholu, plus případné ohodnocení vrcholů a hran.
- Vybereme libovolný počátek prohledávání $u \in V(G)$; úschovna $U \leftarrow \{u\}$.
- Dokud $U \neq \emptyset$, opakujeme:
  - Zvolíme libovolně $v \in U$; odebereme $U \leftarrow U \setminus \{v\}$. (!)
  - *Pokud stav*(v) = *zpracovaný, jdeme zpět na start cyklu.* (*)
  - Případně provedeme libovolnou akci *ZPRACUJ*(v).
  - Pro všechny hrany $f \in E(G)$ vycházející z v provedeme:
    - Nechť w je druhý konec hrany $f = vw$;
    - pokud *stav*$(w) \neq$ zpracovaný, odložíme $U \leftarrow U \cup \{w\}$. (**)
  - *stav*$(v) \leftarrow$ zpracovaný; na start cyklu.
- Souvislý G je celý prohledaný a zpracovaný.
- *Výstup:* Případné výsledky spočítané během prohledávání.

Pozor, všimněte se, že v bodě (**) obecně dochází k násobnému ukládání odložených vrcholů, což v praktické implementaci často obejdeme pouhou změnou „odloženého stavu“. Doplňkový bod (*) je nutný jen v případě, že násobně uložené kopie stejného vrcholu v zůstávají v úschovně.

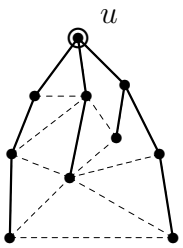
Některé implementace procházení grafu

V Algoritmu 8.2 si dobře všimněte, jak je vlastně proveden krok (!); „*zvolíme libovolně* $v \in U$“ ? Právě tato volba je klíčová pro výslednou podobu projití grafu G:

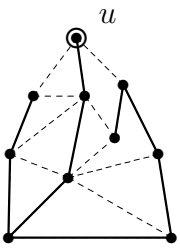
- *Procházení „do šířky“, BFS* – úschovna U je implementovaná jako *fronta*, neboli je voleno $v \in U$ od prvních vrcholů vložených do úschovny.
- *Procházení „do hloubky“, DFS* – úschovna U je implementovaná jako *zásobník*, neboli je voleno $v \in U$ od později vložených do úschovny. (Zde je extrémně důležité, že opakované vložení vrcholu v do U jej posune na vršek zásobníku.)
- Na obrázku si názorně ukážeme, jaký efekt má volba úschovny na výsledný výběr

„objevitelských“ hran v průchodu grafem:

BFS (“fifo”)



DFS (“lifo”)



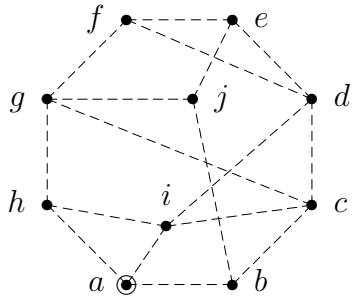
Později v této lekci uvedeme tyto dva konkrétní, staré a dobře známé algoritmy přímo založené na prohledávání grafu:

- *Dijkstrův algoritmus* pro nejkratší cestu – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší (dosud určenou celkovou vzdáleností) k počátečnímu u.
- *Jarníkův algoritmus* pro minimální kostru – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší (délkou hrany) ke kterémukoliv již zpracovanému vrcholu.

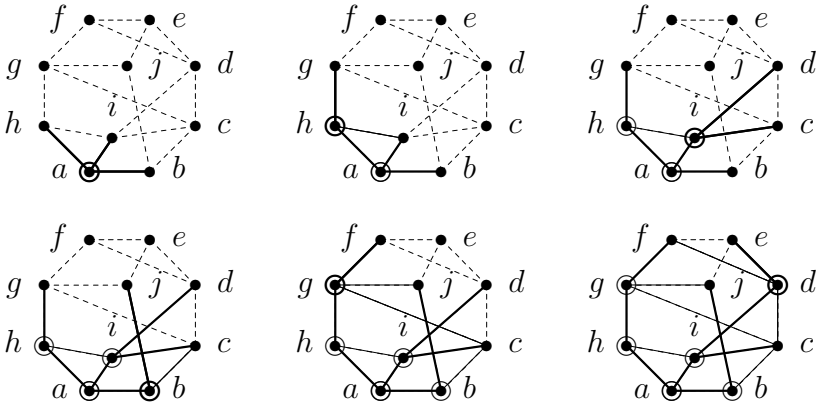
`Poznámka`: Jarníkův algoritmus se ve světové literatuře se obvykle připisuje Američanu Primovi, který jej však objevil a publikoval až skoro 30 let po Jarníkovi. A co více, původ problému minimální kostry je úzce svázán s Brnem, jak si řekneme za chvíli.

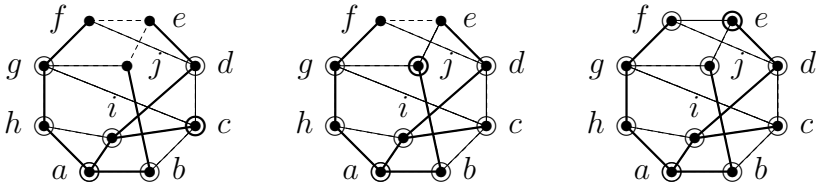
Konkrétní ukázky BFS a DFS

Příklad 8.3. *Ukázka průchodu následujícím grafem do šířky z vrcholu a.*



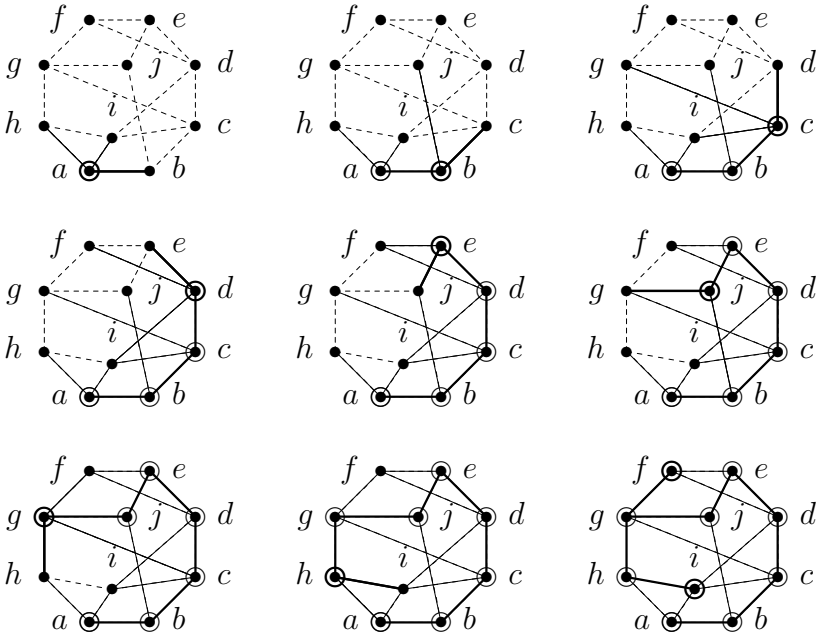
Značení v prohledávaném grafu: barevně aktuálně zpracovávaný vrchol a jeho hrany objevující nové vrcholy, kroužkem a plnou čarou již zpracované vrcholy a hrany, tlustě výsledný strom prohledávání.





□

Příklad 8.4. *Ukázka průchodu předchozím grafem do hloubky z vrcholu a.*



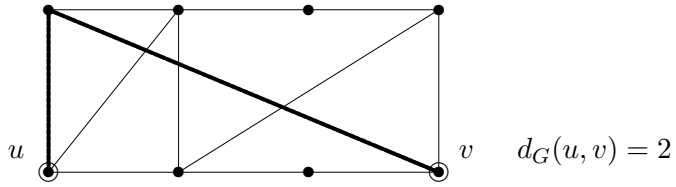
□

8.2 Vzdálenost v grafu

Mimo prohledávání celého souvislého grafu, čímž se zabýval předchozí oddíl, je častou úlohou se dostat z místa na místo nejkratší cestou. Ve zjednodušeném podání považujeme každou hranu grafu za jednotkově dlouhou a definujeme následující.

Definice 8.5. ***Vzdálenost*** $d_G(u, v)$ dvou vrcholů u, v v grafu G je dána délkou nejkratší cesty mezi u a v v G. Pokud cesta mezi u, v neexistuje, je vzdálenost definována $d_G(u, v) = \infty$.

`Komentář:` Neformálně řečeno, vzdálenost mezi u, v je rovna *nejmenšímu počtu hran*, které musíme překonat, pokud se chceme dostat z u do v. Speciálně $d_G(u, u) = 0$.



`Fakt`: V neorientovaném grafu je vzdálenost symetrická, tj. $d_G(u, v) = d_G(v, u)$.

Tvrzení 8.6. *Vzdálenost v grafech splňuje* trojúhelníkovou nerovnost*:*

$$\forall u, v, w \in V(G) \ : \quad d_G(u, v) + d_G(v, w) \geq d_G(u, w)\,.$$

Důkaz. Postupujeme podobně jako v důkaze Tvrzení 7.10 – pokud máme cesty P, P' mezi u, v a mezi v, w, tak existuje cesta $Q \subseteq P \cup P'$ mezi u, w, jež má zřejmě délku nejvýše $d_G(u, v) + d_G(v, w)$. Skutečná vzdálenost mezi u, w pak už může být jen menší. □

BFS a zjištění vzdálenosti

Jak nejsnadněji určíme vzdálenost v grafu? Stačí si povšimnout hezkých vlastností procházení grafu do šířky.

Věta 8.7. *Algoritmus procházení grafu do šířky lze použít pro výpočet grafové vzdálenosti z daného vrcholu u.*

Toto je poměrně jednoduchá aplikace, kdy počátečnímu vrcholu u přiřadíme vzdálenost 0, a pak vždy každému dalšímu nalezenému vrcholu v přiřadíme vzdálenost o 1 větší než byla vzdálenost vrcholu, ze kterého byl nalezen.

Důkaz se opírá o následující tvrzení:

* Nechť u, v, w jsou vrcholy souvislého grafu G takové, že $d_G(u, v) < d_G(u, w)$. Pak při algoritmu procházení grafu G do šířky z vrcholu u je vrchol v nalezen dříve než vrchol w.

Poté přirozeně postupujeme indukcí podle vzdálenosti $d_G(u, v)$: Pro $d_G(u, v) = 0$, tj. $u = v$ je tvrzení jasné – vrchol u jako počátek prohledávání byl nalezen první. Proto nechť $d_G(u, v) = d > 0$ a označme v' souseda vrcholu v bližšího k u, tedy $d_G(u, v') = d - 1$. Obdobně uvažme libovolného souseda w' vrcholu w. Pak

$$d_G(u, w') \geq d_G(u, w) - 1 > d_G(u, v) - 1 = d_G(u, v')\,,$$

a tudíž vrchol v' byl nalezen v prohledávání do šířky *dříve než* vrchol w' podle indukčního předpokladu. To znamená, že v' se dostal do fronty úschovny dříve než w'. Proto sousedé v' (mezi nimiž je v, ale ne w neboť $v'w$ není hranou) jsou při pokračujícím prohledávání *také nalezeni dříve, než* w coby soused w'. □

8.3 Hledání nejkratší cesty

V dalším textu se již budeme věnovat grafům s „obecně dlouhými“ hranami. Zároveň předesíláme, že přednášená látka stejně dobře může stavět na orientovaných grafech.

Definice: Vážený graf je graf G spolu s ohodnocením w hran reálnými čísly $w : E(G) \to \mathbb{R}$. *Kladně vážený graf* (G, w) je takový, že $w(e) > 0$ pro všechny hrany e.

Definice 8.8. ***(vážená vzdálenost)*** Mějme (kladně) vážený graf (G, w).
Váženou délkou cesty P je

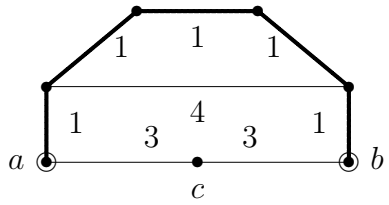
$$d^w_G(P) = \sum\nolimits_{e \in E(P)} w(e)\,.$$

Váženou vzdáleností v (G, w) mezi dvěma vrcholy u, v pak je

$$d^w_G(u, v) = \min\{d^w_G(P) : P \text{ je cesta s konci } u, v\}\,.$$

Tvrzení 8.9. *Vážená vzdálenost v nezáporně vážených grafech (i orientovaných grafech) splňuje trojúhelníkovou nerovnost.*

Příklad 8.10. *Podívejme se na následující ohodnocený graf (čísla u hran udávají jejich váhy–délky.)*



Vzdálenost mezi vrcholy a, c je 3, stejně tak mezi b, c. Co ale mezi a, b? Je jejich vzdálenost 6? Kdepak, vzdálenost a, b je 5, její cesta vede po „horních" vrcholech, jak je vyznačeno. Povšimněte si, že tento příklad zároveň ukazuje, že postup prohledáváním do šířky není korektní pro hledání vzdáleností ve váženém grafu. □

Problém nejkratší cesty

Problém nejkratší cesty mezi dvojicí vrcholů prostě hledá váženou vzdálenost vrcholů a příslušnou cestu. Jedná se patrně o nejznámější „grafový" problém v praktických aplikacích, jenž nalezneme od vyhledávání dopravních spojení, GPS navigací, plánování pohybů robota, až po třeba rozhodovací systémy.

Tento problém se nejčastěji řeší implementací klasického *Dijkstrova algoritmu*, který je vhodnou úpravou procházení grafu do šířky – vybírá vždy *vrchol s nejmenší vzdáleností* mezi uschovanými vrcholy.

Dijkstrův algoritmus

Algoritmus 8.11. ***Hledání nejkratší cesty mezi*** u ***a*** v ***v kladně váženém grafu.*** *Tento algoritmus využívá proměnnou hodnotu (pole) $d(x)$ k ukládání nalezených vzdáleností do každého vrcholu x, vedle samotného vrcholu, přičemž tuto hodnotu postupně „vylepšuje" až do finálního zpracování vrcholu.*

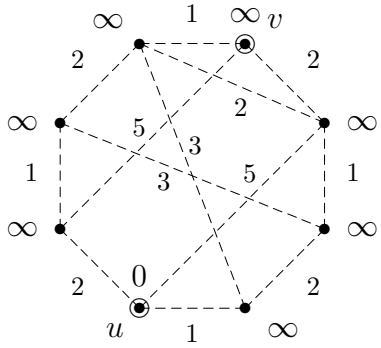
- *Vstup:* Souvislý graf G, daný seznamem vrcholů a seznamy vycházejících hran z každého vrcholu, plus váhy w hran. Počáteční vrchol u a koncový v.
- Úschovna $U \leftarrow \big\{(u,\, d(u) = 0)\big\}$.
- Dokud $U \neq \emptyset$, opakujeme:
  - Zvolíme $(x,\, d(x)) \in U$ takové, že $d(x)$ je *minimální*.
    Odebereme $U \leftarrow U \setminus \big\{(x,\, d(x))\big\}$ a *zafixujeme hodnotu* $d(x)$.
  - Pokud $x = v$, algoritmus může skončit.
  - Pro všechny hrany $f \in E(G)$ vycházející z x provedeme:
    - Nechť y je druhý konec hrany $f = xy$;
      a nechť $d'(y) = d(x) + w(f)$ *(nová cesta do y přes x).*
    - Pokud $(y,\, d(y)) \notin U$, nebo $(y,\, d(y)) \in U$ pro $d(y) > d'(y)$,
      odložíme $U \leftarrow \big(U \setminus \{(y, d(y))\}\big) \cup \big\{(y,\, d'(y))\big\}$
      (výměna za novou, lepší dočasnou vzdálenost do y).

- *Výstup:* $d(v)$ nyní udává váženou vzdálenost z u do v.

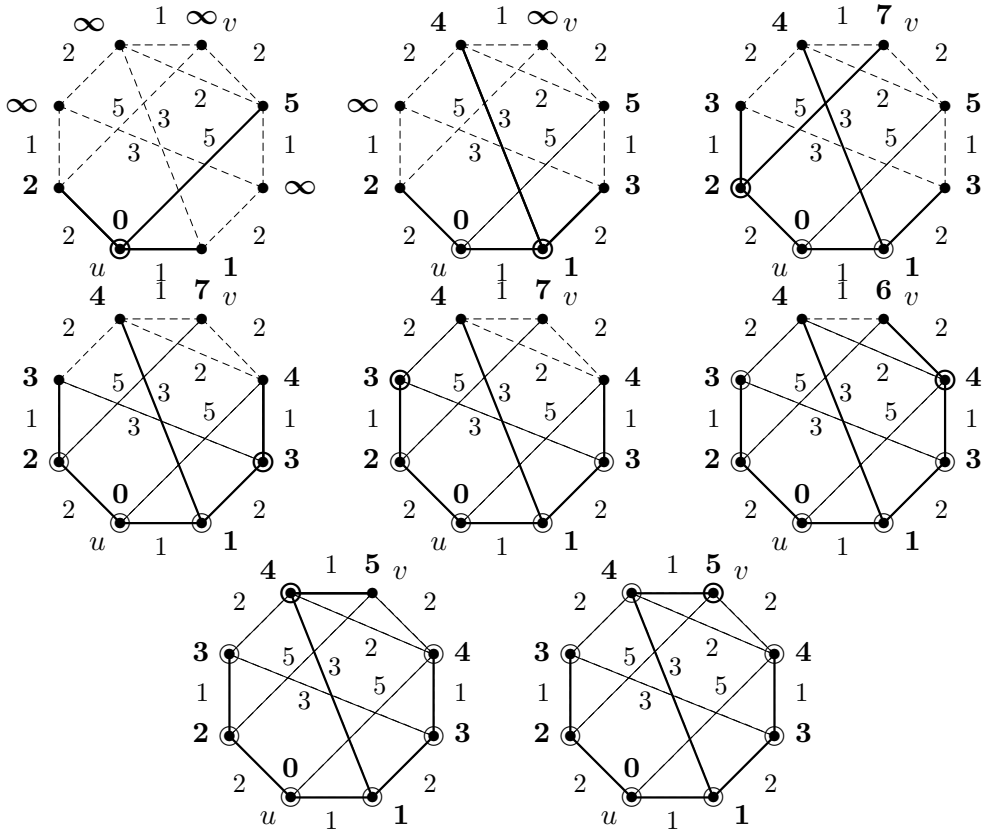
`Poznámka`: V konkrétní implementaci Dijkstrova algoritmu nejspíše využijeme nějakou datovou strukturu podporující rychlé vkládání prvků a vybírání podle minimální hodnoty klíče – nejlépe tedy *haldu*, a k tomu pole $d[y]$ přímo ukládající průběžně aktualizovanou dočasnou váženou vzdálenost z u do každého y. Navíc je prakticky potřeba ke každé uložené dočasné vzdálenosti $d[y]$ uložit i příslušný příchozí vrchol x, ze kterého na konci algoritmu zpětně vyčteme cestu samotnou (coby posloupnost vrcholů).

`Komentář:` Klíčem k pochopení činnosti Dijkstrova algoritmu je „uvidět“, že v každé jeho fázi jsou správně nalezeny všechny nejkratší cesty z u vedoucí po zpracovaných vrcholech. Postupem prohledávání grafu se tak jednou dostaneme až k určení správné vzdálenosti cíle v.

Příklad 8.12. *Ukázka běhu Dijkstrova Algoritmu 8.11 pro nalezení nejkratší cesty mezi vrcholy u, v v následujícím váženém grafu.*



Jednotlivé iterace algoritmu jsou zakresleny níže. Čísla u vrcholů v obrázcích udávají průběžně aktualizovanou dočasnou vzdálenost z u.



□

Důkaz správnosti

Věta 8.13. *Dijkstrův Algoritmus 8.11 pro kladně vážený graf (G, w) vždy správně najde nejkratší cestu mezi danými vrcholy u, v.*

`Důkaz` vede přes následující zesílené tvrzení indukcí:

- V každé iteraci Algoritmu 8.11 hodnota $d(x)$ udává nejkratší vzdálenost z vrcholu u do x při cestě pouze po už zpracovaných vnitřních vrcholech.

V bázi indukce dovolujeme pouze cesty používající u a x, tj. jen hrany vycházející z u. Ty jsou v první iteraci algoritmu probrány a jejich délky uloženy do U. V každém dalším kroku je vybrán jako vrchol x ke zpracování ten, který má ze všech nezpracovaných vrcholů nejkratší nalezenou vzdálenost od počátku u. V tom okamžiku je $d(x)$ platnou vzdáleností do x, neboť jakákoliv cesta přes jiný nezpracovaný vrchol nemůže být kratší díky nezápornosti vah w. Z toho pak vyplývá, že zpracování vrcholu x správně upraví dočasné vzdálenosti odložené do U. Důkaz indukcí je hotov. □

8.4 Problém minimální kostry

Na závěr této lekce se zaměříme ještě na jednu tradiční úlohu, která se koncepčně podobá problému nejkratší cesty. V tomto případě nebudeme hledat nejkratší spojení mezi dvojicí vrcholů, ale mezi všemi vrcholy najednou – této úloze se říká *minimální kostra* neboli MST („minimum spanning tree“). V návaznosti na Oddíl 7.4 definujeme toto:

`Definice`: Podgraf $T \subseteq G$ souvislého grafu G se nazývá *kostrou*, pokud

- T je stromem a
- $V(T) = V(G)$, neboli T *propojuje všechny vrcholy* G.

Váhou (délkou) kostry $T \subseteq G$ váženého souvislého grafu (G, w) rozumíme

$$d_G^w(T) = \sum\nolimits_{e \in E(T)} w(e)\,.$$

Definice 8.14. ***Problém minimální kostry (MST)*** ve váženém souv. grafu (G, w) hledá kostru $T \subseteq G$ s nejmenší možnou vahou (přes všechny kostry grafu G).

`Komentář:` Problém minimální kostry je ve skutečnosti historicky úzce svázán s jižní Moravou a Brnem, konkrétně s elektrifikací jihomoravských vesnic ve dvacátých letech! Právě na základě tohoto praktického optimalizačního problému brněnský matematik Otakar Borůvka jako první v matematické literatuře zformuloval a podal řešení problému minimální kostry v roce 1926. První ne-českou publikací na toto téma je až Kruskalův hladový algoritmus z roku 1956.

Hladové řešení minimální kostry

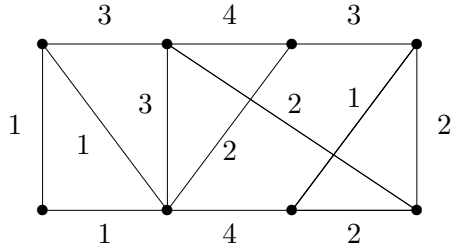
Následující postup tzv. hladového nalezení minimální kostry pochází od Kruskala.

Metoda 8.15. ***Hladový postup pro minimální kostru grafu*** (G, w)**.**
Mějme dán souvislý vážený graf G s ohodnocením hran w.

- Seřadíme všechny hrany G jako $E(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ tak, že $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$.

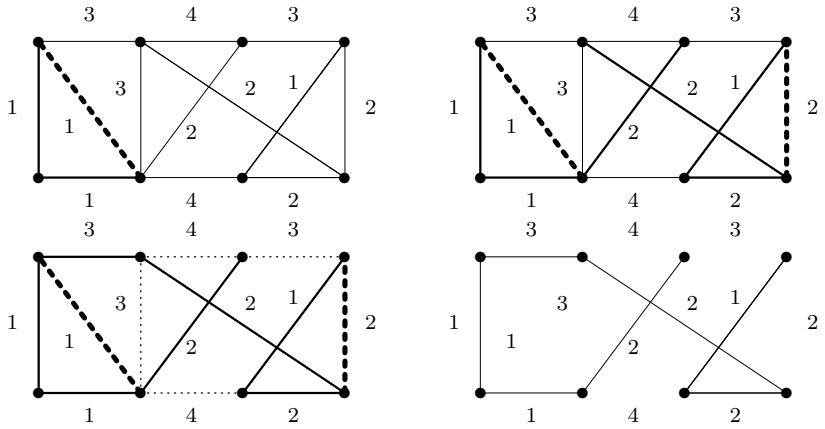
- Inicializujeme prázdnou kostru $T = (V(G), \emptyset)$.
- Po řadě pro $i = 1, 2, \ldots, m$ provedeme následující:
  - Pokud $T + e_i$ *nevytváří kružnici*, tak $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e_i\}$.
    (Neboli pokud e_i spojuje různé komponenty souvislosti dosavadního T.)
- Na konci T obsahuje minimální kostru grafu G (případně jednu z několika takových).

`Komentář:` Pro ilustraci si ukážeme postup hladového algoritmu pro vyhledání kostry následujícího grafu:



Hrany si nejprve seřadíme podle jejich vah $1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4$.

V obrázku průběhu algoritmu používáme tlusté čáry pro vybrané hrany kostry a tečkované čáry pro zahozené hrany. Hrany teď postupně přidáváme do kostry / zahazujeme...



Získáme tak minimální kostru velikosti $1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 12$, která je v tomto případě (náhodou) cestou, na posledním obrázku vpravo.

Poznamenáváme, že při jiném seřazení hran stejné váhy by kostra mohla vyjít jinak, ale vždy bude mít stejnou velikost 12.

Věta 8.16. *Hladový postup korektně spočítá minimální kostru váženého grafu (G, w).*

`Důkaz` (náznak): Pro spor předpokládejme, že T_1 je kostra spočítaná Metodou 8.15 a T_2 nějaká minimální kostra, kde $d^w_G(T_2) < d^w_G(T_1)$ a rozdíl $|E(T_1)\Delta E(T_2)|$ je nejmenší. Nechť i je nejmenší index takový, že $e_i \in E(T_1)\Delta E(T_2)$. Pak nutně $e_i \in E(T_1) \setminus E(T_2)$ (proč?), a tudíž $T_2 + e_i$ podle Důsledku 7.18 obsahuje kružnici procházející také hranou e_j pro $j > i$. Potom však $T_3 = (T_2 + e_i) \setminus \{e_j\}$ je další kostrou mající váhu $d^w_G(T_2) + w(e_i) - w(e_j) \geq d^w_G(T_2)$, a proto $w(e_i) = w(e_j)$. Tudíž T_3 je minimální kostra „bližší“ T_1 ve smyslu symetrického rozdílu, což je spor s volbou T_2. □

Jarníkův (Primův) algoritmus

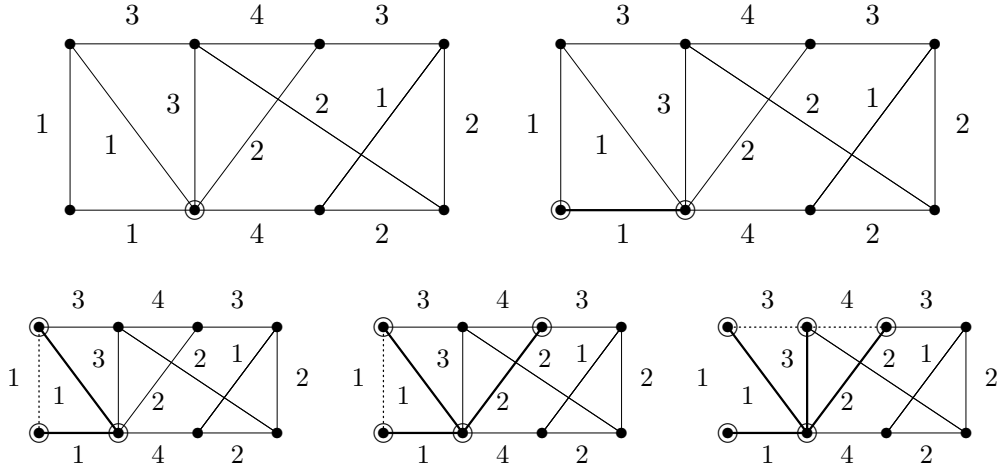
Ač koncepčně velmi jednoduchá, má Metoda 8.15 některé problematické implementační detaily, pro které je mnohem častěji používán následující algoritmus (často připisován Američanu Primovi, ale mnohem dříve publikován Vojtěchem Jarníkem v 1930), založený na běžném procházení grafu.

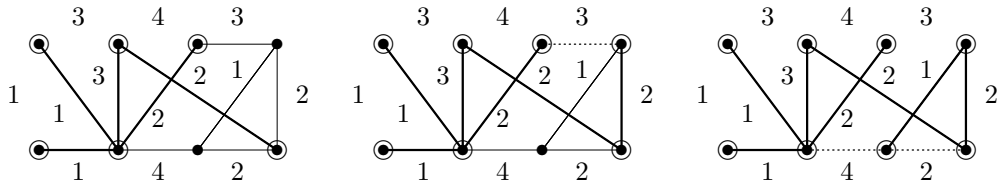
Algoritmus 8.17. ***Hledání minimální kostry ve váženém grafu*** (G, w)**.**
Opět mějme dán souvislý vážený graf G s ohodnocením hran w. Níže uvedená specifická implementace procházení grafu využívá úschovnu rozšířeným způsobem, kdy ukládá i příchozí hranu do vrcholu.

- *Vstup:* Souvislý graf G, daný seznamem vrcholů a seznamy vycházejících hran z každého vrcholu, plus váhy w hran.
- Vybereme libovolný počátek prohledávání $u \in V(G)$; úschovna $U \leftarrow \big\{(u, \emptyset)\big\}$. Kostra $T = (V(G), \emptyset)$.
- Dokud $U \neq \emptyset$, opakujeme:
  - Zvolíme $(x, e) \in U$ takové, že $w(e)$ je *minimální* (kde $w(\emptyset) = 0$). Odebereme $U \leftarrow U \setminus \big\{(x, e)\big\}$.
  - Přidáme $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e\}$ *(nová hrana do budoucí kostry).*
  - Pro všechny hrany $f \in E(G)$ vycházející z x provedeme:
    - Nechť y je druhý konec hrany $f = xy$.
    - Pokud $(y, f') \notin U$, nebo $(y, f') \in U$ pro nějaké $w(f') > w(f)$, odložíme $U \leftarrow \big(U \setminus \{(y, f')\}\big) \cup \big\{(y, f)\big\}$ *(nalezena kratší hrana f mezi zpracovanými a nezpracovanými vrcholy).*
- *Výstup:* T udává výslednou minimální kostru.

`Poznámka`: V konkrétní implementaci postupujeme stejně jako u Dijkstrova Algoritmu 8.11, nejlépe za použití haldy ukládající dvojice (y, f) podle klíče $w(f)$.

`Komentář:` Následuje stručná ukázka průběhu Jarníkova algoritmu, kde kostru opět vyznačujeme tučnými čarami a zpracované vrcholu kroužky kolem.





Rozšiřující studium

S běžnými grafovými algoritmy, které zahrnují zde uvedené a mnohem více, se studenti informatiky seznámí hlouběji v každém kurzu návrhu algoritmů. (Navíc jsou běžné grafové algoritmy výborně popsány na Wikipedii...) Rozšíření postupu prohledávání grafu nám například umožní vyhledávat 2-souvislé nebo silně-souvislé komponenty. Pro hledání nejkratší cesty také existují sofistikovanější algoritmy, které jsou schopny pracovat i za přítomnosti záporných hran (ale bez záporných cyklů), jako třeba Johnsonův algoritmus. My si dále uvedeme jako příklad Floyd-Warshallův algoritmus s důkazem správnosti v Lekci 11.

Celkově je třeba říci, že v našem kurzu se na rozdíl od kurzů algoritmických nezabýváme vůbec otázkami programátorské implementace a efektivity, nýbrž studujeme matematické aspekty grafových úloh a metod jejich řešení. Oba pohledy by pak dobře vybavený informatik měl znát.

Pokud máte navíc zájem se dozvědět více o zajímavé české historii problému minimální kostry, přečtěte si v dříve zmíněné knize Kapitoly z diskrétní matematiky autorů Jiřího Matouška a Jaroslava Nešetřila.

9 Orientované grafy, Toky v sítích

Úvod

Fakt, že grafy se často používají k modelování různých druhů sítí z reálného světa, byl vidět již v předchozí lekci. Na rozdíl třeba od cestních sítí se nyní budeme zabývat typem síťových úloh, ve kterých není podstatná délka hran a spojení, nýbrž jejich propustnost. (Typickými příklady jsou potrubní nebo počítačové sítě.) Základní úlohou v této oblasti je problém nalezení maximálního toku v síti za podmínky respektování daných kapacit hran. I na tento problém si uvedeme jednoduchý klasický algoritmus a především si budeme všímat mnohých důležitých matematických důsledků tohoto algoritmu, jmenovitě vázaných k tzv. dualitě maximálního toku a minimálního řezu, *která přirozeně vysvětluje optimalitu řešení mnohých úloh. Následně si ukážeme široké využití toků v síti, které sahá od grafové souvislosti až třeba pro problém segmentace obrazu.*

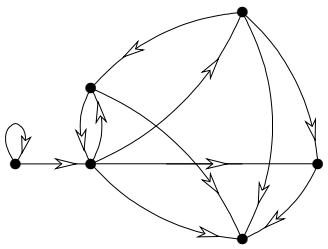
Jelikož pro zkoumaný typ síťových úloh je klíčová implicitní orientace každé hrany, v této lekci začneme samotnou definicí orientovaného grafu *a základními vlastnostmi; obdobně úvodní látce vyložené o grafech v Lekci 7.*

Cíle

Zadefinujeme orientované grafy a uvedeme si jejich základní vlastnosti, včetně orientované souvislosti. Definujeme pojem sítě s kapacitami hran a ukážeme si základní algoritmus pro úlohu hledání maximálního toku. Probereme některé důležité teoretické důsledky postupu nalezení maximálního toku; především dualitu toku a řezu, vyšší úrovně souvislosti grafu, hledání bipartitního párování a systémů různých reprezentantů.

9.1 Základní pojmy orientovaných grafů

Požadavek explicitně vyjádřit *směr hrany* přirozeně vede na následující definici orientovaného grafu, ve kterém hrany jsou *uspořádané* dvojice vrcholů. (V obrázcích kreslíme orientované hrany se šipkami.)



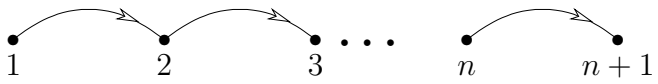
Definice 9.1. ***Orientovaný graf*** je uspořádaná dvojice $D = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a $E \subseteq V \times V$ je množina hran – tj. podmnožina vybraných uspořádaných dvojic vrcholů.
Pojmy *podgrafu* a *isomorfismu* se přirozeně přenášejí na orientované grafy.

`Značení`: Hrana (u, v) (zvaná také *šipka*) v orientovaném grafu D *začíná* ve vrcholu u a *končí* ve (míří do) vrcholu v. Opačná hrana (v, u) je různá od (u, v).

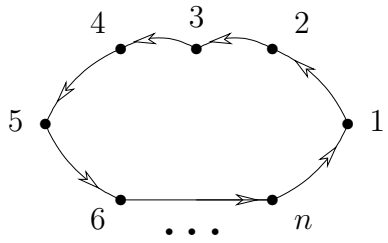
Speciálně hrana tvaru (u, u) se nazývá *orientovaná smyčka*.

`Komentář:` Orientované grafy odpovídají relacím, které nemusí být symetrické. Mezi stejnou dvojicí vrcholů mohou tudíž existovat dvě hrany v obou směrech, nebo jen kterákoliv jedna z nich nebo žádná. Všimněte si také, že orientované grafy implicitně odlišujeme od obyčejných použitím písmene D místo dřívějších G, H.

Například *orientovaná cesta* délky $n \geq 0$ je následujícím grafem na $n+1$ vrcholech



a *orientovaná kružnice* (také *cyklus*) délky $n \geq 1$ vypadá takto:



`Definice`: Počet hran začínajících ve vrcholu u orientovaného grafu D nazveme *výstupním stupněm* $d_D^+(u)$ a počet hran končících v u nazveme *vstupním stupněm* $d_D^-(u)$.

`Komentář:` Součet všech výstupních stupňů je přirozeně roven součtu všech vstupních stupňů orientovaného grafu. Důkaz viz Věta 7.3.

Všimněte si, že některá literatura používá opačná znaménka $(-/+)$ při značení výstupních a vstupních stupňů, ale s tím nic nenaděláme a čtenář se prostě vždy musí zorientovat a zjistit aktuální situaci.

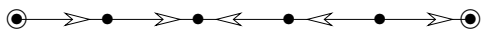
`Definice`: *Symetrizací* orientovaného grafu D rozumíme neorientovaný graf G vzniklý „zapomenutím směru hran“ v D, přesněji $V(G) = V(D)$ a $uv \in E(G)$ právě když $\{(u,v),(v,u)\} \cap E(D) \neq \emptyset$.

Souvislost na orientovaných grafech

Pojem orientované souvislosti grafu D je natolik fundamentálně odlišný od neorientovaného případu (což je dáno právě jeho „směrovostí“), že si zaslouží samostatnou diskusi i v našem zběžném pohledu na orientované grafy. Uvedeme si na ni odstupňovaně tři základní pohledy:

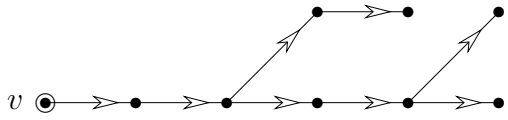
- *Slabá souvislost.* Jedná se o tradiční *souvislost na symetrizaci* grafu D

  `Komentář:` Zjednodušeně a názorně se dá říci, že při cestování grafem „zapomeneme“ směr šipek. Na obrázku:

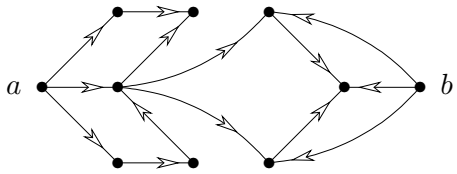
  

  Tento přístup sice může vypadat poněkud nesmyslně – proč šipky zavádět a pak zapomínat jejich směr, avšak brzy u tzv. nenasycených cest uvidíme smysl představy, že cesta v orientovaném grafu se „tlačí“ proti směru hrany.

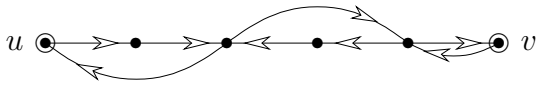
- *Dosažitelnost (směrem „ven“).* Orientovaný graf D je *dosažitelný směrem ven*, pokud v něm existuje vrchol $v \in V(D)$ takový, že každý vrchol $x \in V(D)$ je dosažitelný orientovaným sledem z v.

`Komentář:` Podrobným zkoumáním následujícího obrázku zjistíme, že jeho graf není dosažitelný směrem ven, neboť chybí možnost dosáhnout vrchol b úplně vpravo. Na druhou stranu po vypuštění b je zbylý graf dosažitelný ven z vrcholu a vlevo.

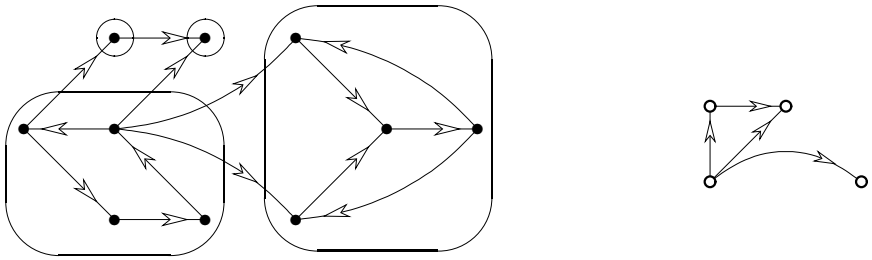


- *Silná souvislost.* Nechť $\approx$ je binární relace na vrcholové množině $V(D)$ orientovaného grafu D taková, že $u \approx v$ právě když existuje dvojice orientovaných cest – jedna z u do v a druhá z v do u v grafu D. Pak $\approx$ je *relace ekvivalence*.



Definice 9.2. ***Silné komponenty*** orientovaného grafu D
jsou třídy ekvivalence relace $\approx$ uvedené v předchozím. Orientovaný graf D je *silně souvislý* pokud má nejvýše jednu silnou komponentu.

`Komentář:` Pro ilustraci si mírně upravíme dříve prezentovaný orientovaný graf tak, že bude dosažitelný z nejlevějšího vrcholu. Je výsledek silně souvislý?



Ne, na obrázku jsou vyznačené jeho 4 silné komponenty. Vpravo zároveň uvádíme pro ilustraci obrázek *kondenzace* silných komponent tohoto grafu, což je acyklický orientovaný graf s vrcholy reprezentujícími zmíněné silné komponenty a směry hran mezi nimi.

Pro zvídavé čtenáře poznamenáváme, že si mohou definici silné komponenty porovnat s jádrem předuspořádání v Oddíle 5.4. Kde vidíte drobný rozdíl?

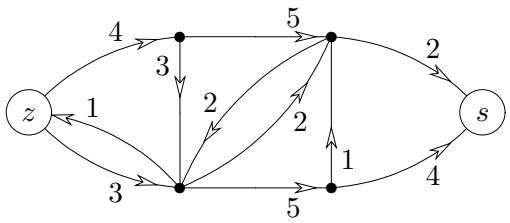
9.2 Definice sítě a toku

Základní strukturou pro reprezentaci sítí je *vážený orientovaný graf* (přičemž implicitní směr hran je v tomto kontextu nezbytný). Váhy (hran) v takovém modelu vyjadřují „kapacity“ jednotlivých spojů a nás zajímá, jak mnoho uvažované *substance* dokážeme (různými cestami) přenést z daného *zdroje do stoku*. Podstata substance není důležitá, ale ta musí být vhodně rozdělitelná.

Definice 9.3. ***Síť*** je čtveřice $S = (D, z, s, w)$, kde
- D je orientovaný graf,

* vrcholy $z \in V(D)$, $s \in V(D)$ jsou *zdroj* a *stok*,
* $w : E(D) \to \mathbb{R}^+$ je kladné ohodnocení hran, zvané *kapacita hran*.

`Komentář:`



Na obrázku je zakreslena síť s vyznačeným zdrojem z a stokem s, jejíž kapacity hran jsou zapsány čísly u hran. Šipky udávají směr hran, tedy směr proudění uvažované substance po spojnicích. Pokud směr proudění není důležitý, vedeme mezi vrcholy dvojici opačně orientovaných hran se stejnou kapacitou. Kapacity hran pak omezují maximální množství přenášené substance.

`Poznámka`: V praxi může být zdrojů a stoků více, ale v definici stačí pouze jeden zdroj a stok, z něhož / do nějž vedou hrany do ostatních zdrojů / stoků. (Dokonce pak různé zdroje a stoky mohou mít své kapacity.)

Velikost toku v síti

V souladu s praktickými aspekty nás u toku v síti zajímá především to, jaké „množství“ substance (velikost toku) se skutečně přenese od zdroje ke stoku.

`Značení`: Pro jednoduchost píšeme ve výrazech značku $e \to v$ pro hranu e končící ve vrcholu v a $e \leftarrow v$ pro hranu e začínající z v.

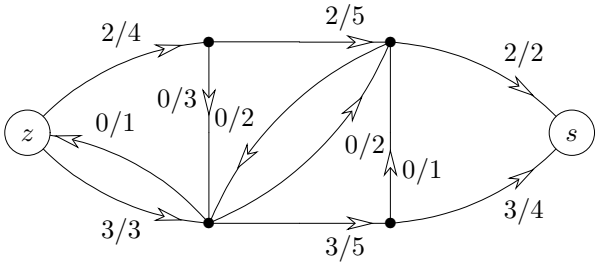
Definice 9.4. ***Tok v síti*** $S = (D, z, s, w)$ je funkce $f : E(D) \to \mathbb{R}_0^+$ splňující

* $\forall e \in E(D) : \ 0 \le f(e) \le w(e)$,
* $\forall v \in V(D), v \neq z, s : \ \sum_{e \to v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$.

Velikost toku f je dána výrazem $\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \to z} f(e)$.

`Značení`: Tok a kapacitu hran v obrázku sítě budeme zjednodušeně zapisovat ve formátu F/C, kde F je hodnota toku na hraně a C je její kapacita.

`Komentář:` Neformálně tok znamená, kolik substance je každou hranou zrovna přenášeno (ve směru této hrany, proto hrany musí být orientované). Tok je pochopitelně nezáporný a dosahuje nejvýše dané kapacity hrany. Navíc je nutno v každém vrcholu mimo z, s splnit podmínku „zachování substance“.



Ve vyobrazeném příkladě vede ze zdroje vlevo do stoku vpravo tok o celkové velikosti 5.

`Poznámka`: Obdobně se dá velikost toku definovat u stoku (či i na obecném řezu v síti, viz dále), neboť platí následující identita odvozená z vlastnosti zachování substance v definici toku

$$0 = \sum_{e \in E} \big(f(e) - f(e)\big) = \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \leftarrow v} f(e) - \sum_{e \rightarrow v} f(e) \right) = \sum_{v = z,s} \left(\sum_{e \leftarrow v} f(e) - \sum_{e \rightarrow v} f(e) \right) .$$

Proto velikost toku počítaná u zdroje je rovna opačné velikosti toku počítaného u stoku

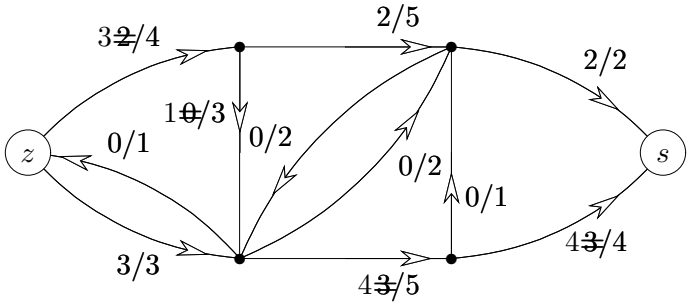
$$\left(\sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \rightarrow z} f(e) \right) = \left(\sum_{e \rightarrow s} f(e) - \sum_{e \leftarrow s} f(e) \right) .$$

9.3 Nalezení maximálního toku

Naším úkolem je najít co největší přípustný tok v dané síti. Pro jeho nalezení existují jednoduché a velmi rychlé algoritmy. Navíc tyto algoritmy mají zajímavé teoretické souvislosti a důsledky uvedené později.

Definice 9.5. ***Úloha hledání maximálního toku*** v síti $S = (D, z, s, w)$.
Úkolem je v síti S najít tok f ze zdroje z do stoku s podle Definice 9.4 takový, který maximalizuje velikost $\|f\|$.

`Komentář`: Tok velikosti 5 uvedený v ukázce v předchozí části nebyl optimální, neboť v této síti najdeme i tok velikosti 6:



Jak však poznáme, že větší tok již v dané síti neexistuje? V této konkrétní ukázce to není obtížné, vidíme totiž, že obě dvě hrany přicházející do stoku mají součet kapacit $2 + 4 + 6$, takže více než 6 do stoku ani přitéct nemůže. V obecnosti lze použít obdobnou úvahu, kdy najdeme podmnožinu hran, které nelze tokem „obejít“ a které v součtu kapacit dají velikost našeho toku. Existuje však taková množina hran vždy? Odpověď nám dá následující definice a věta.

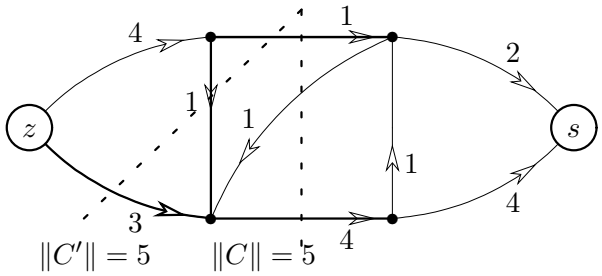
Pojem řezu v síti

Definice 9.6. ***Řez v síti*** $S = (D, z, s, w)$ je podmnožina hran $X \subseteq E(D)$ taková, že v podgrafu $D - X$ (tj. po odebrání hran X z D) nezbude žádná orientovaná cesta ze z do s. *Velikostí řezu* X rozumíme součet kapacit hran z X, tj. $\|X\| = \sum_{e \in X} w(e)$.

Zcela klíčovým poznatkem síťových úloh je následující velmi hezká charakterizace jejich optimálního řešení

Věta 9.7. *Maximální velikost přípustného toku v síti je vždy rovna minimální velikosti řezu v ní.*

`Komentář:` Na následujícím obrázku vidíme trochu jinou síť s ukázkou netriviálního minimálního řezu velikosti 5, naznačeného svislou čárkovanou čarou. Všimněte si dobře, že definice řezu mluví o přerušení *všech orientovaných cest ze z do s*, takže do řezu stačí započítat hrany jdoucí přes svislou čáru od z do s, ale ne hranu jdoucí zpět. Proto je velikost vyznačeného řezu $1 + 4 = 5$.



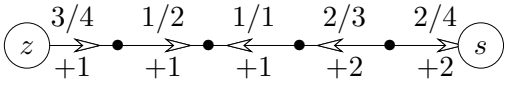
Důkaz Věty 9.7 bude proveden následujícím Algoritmem 9.9.

Nenasycené cesty v síti

`Definice`: Mějme síť S a v ní tok f. *Nenasycená cesta* P (v S vzhledem k f) je neorientovaná cesta v D mezi určenými vrcholy (obvykle ze z do s), tj. posloupnost navazujících libovolně orientovaných hran $e_1, e_2, \ldots, e_m$, kde $f(e_i) < w(e_i)$ pro e_i ve směru ze z do s a $f(e_j) > 0$ pro e_j v opačném směru.

Hodnotě $w(e_i) - f(e_i) > 0$ pro hrany e_i ve směru z u do v a hodnotě $f(e_j) > 0$ pro hrany e_j v opačném směru říkáme *rezerva kapacity* hran. Nenasycená cesta je tudíž cesta s kladnými rezervami kapacit všech hran.

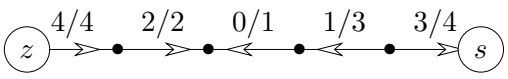
`Komentář:` Zde vidíme příklad nenasycené cesty ze zdroje do stoku s minimální rezervou kapacity +1.



Všimněte si dobře, že cesta není orientovaná, takže hrany na ní jsou v obou směrech.

Metoda 9.8. ***Maximální tok vylepšováním nenasycených cest.***
Základní myšlenkou této jednoduché metody hledání maximálního toku v dané síti je prostě opakovaně vylepšovat tok podél nalezených nenasycených cest.

`Komentář:` Ve výše zakresleném obrázku nenasycené cesty byla minimální rezerva kapacity ve výši +1, a tudíž nasycením této cesty o velikost toku 1 vzniká následující fragment přípustného toku v síti:



Zajímavé je se podívat, co se stalo s prostředními zpětně orientovanými hranami – fakticky byl jejich zpětný tok o 1 snížen/zastaven, přičemž toto množství nyní „teče doprava“ (velmi neformálně řečeno).

`Fakt`: Je-li minimální rezerva kapacity hran nenasycené cesty P ze z do s ve výši $r > 0$, pak tok ze z do s zvýšíme o hodnotu r následovně;

∗ pro hrany $e_i \in E(P)$ ve směru ze z do s zvýšíme tok na $f'(e_i) = f(e_i) + r$,

∗ pro hrany $e_j \in E(P)$ ve směru ze s do z snížíme tok na $f'(e_j) = f(e_j) - r$.

Výsledný tok f' pak bude opět přípustný.

Základní algoritmus nenasycených cest

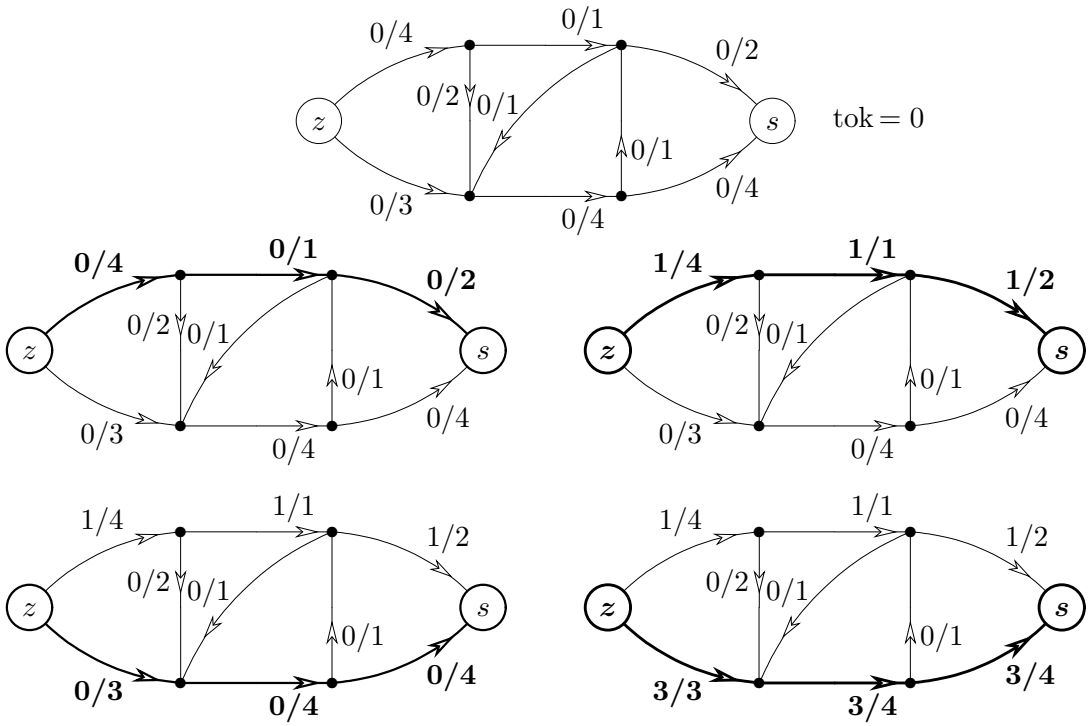
Rámcové implementační podrobnosti Metody 9.8 následují v popise konkrétního algoritmu.

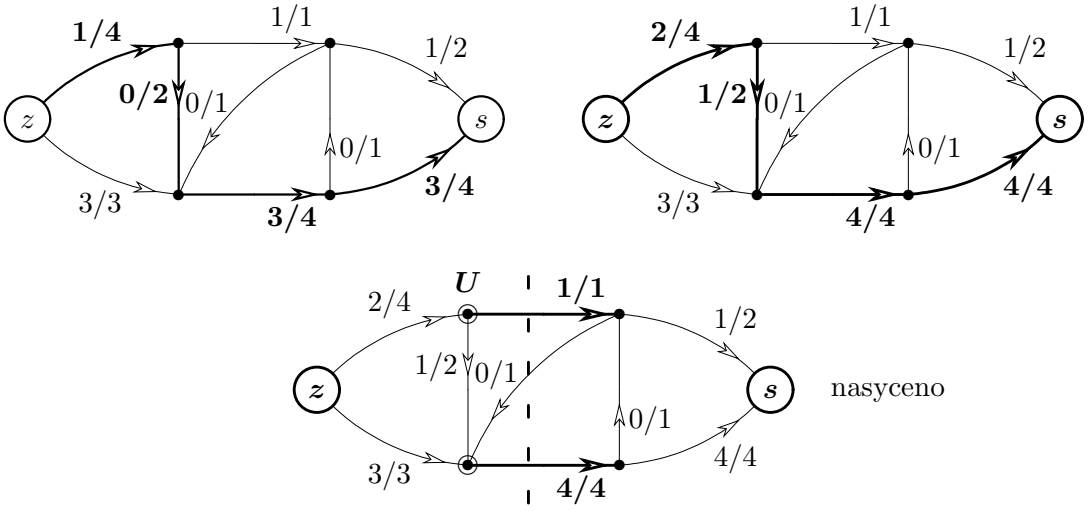
Algoritmus 9.9. ***Ford–Fulkersonův pro tok v síti.***

- *Vstup:* Síť $S = (D, z, s, w)$ podle Definice 9.3.
- Tok $f \leftarrow (0, 0, \ldots 0)$.
- Dále opakujeme následující:
  - ∗ Prohledáváním grafu najdeme množinu U vrcholů D, do kterých se dostaneme ze z po nenasycených cestách.
  - ∗ Pokud $s \in U$, nechť P značí nalezenou nenasycenou cestu v S ze z do s.
    - – Zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacity hran v P.
- Opakujeme kroky výše, dokud nenastane $s \notin U$.
- *Výstup:* Vypíšeme maximální tok f a také minimální řez jako množinu všech hran vedoucích z U do $V(D) - U$.

Příklad 9.10. *Ukázka průběhu Algoritmu 9.9*

Následují obrázky jednotlivých kroků algoritmu, kde vždy levý obrázek zvýrazní nenasycenou cestu a vpravo se nasycením zvýší celkový tok.



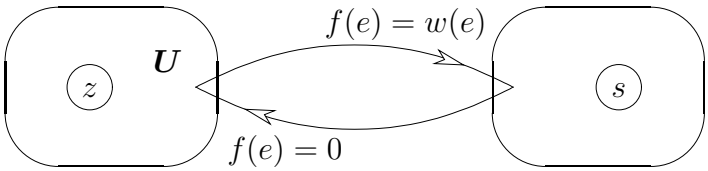


Závěrečný obrázek pak ukazuje výsledný tok velikosti 5 zároveň se zvýrazněným minimálním řezem stejné velikosti. □

Důkaz a důsledky Ford–Fulkersonova algoritmu

Důkaz správnosti Algoritmu 9.9: Pro každý tok f a každý řez X v síti S platí $\|f\| \leq \|X\|$. Jestliže po zastavení algoritmu s tokem f nalezneme v síti S řez o stejné velikosti $\|X\| = \|f\|$, je jasné, že jsme našli maximální možný tok v síti S. (Pozor, zastavení algoritmu jsme zatím nezdůvodnili, to není tak jednoduché.)

Takže dokažme, že po zastavení algoritmu nastane rovnost $\|f\| = \|X\|$, kde X je vypsaný řez mezi U a zbytkem grafu D. Vezměme tok f v S bez nenasycené cesty ze z do s. Pak množina U z algoritmu neobsahuje s. Schematicky vypadá situace takto:



Jelikož z U žádné nenasycené cesty dále nevedou, má každá hrana $e \leftarrow U$ (odcházející z U) plný tok $f(e) = w(e)$ a každá hrana $e \rightarrow U$ (přicházející do U) tok $f(e) = 0$, takže

$$\sum_{e \leftarrow U} f(e) - \sum_{e \rightarrow U} f(e) = \sum_{e \leftarrow U} f(e) = \sum_{e \in X} w(e) = \|X\| \ .$$

Na druhou stranu, když v sumě uvažujeme všechny hrany grafu indukované na naší množině U, tj. $e \in E(D \restriction U)$, analogicky dostaneme požadované

$$0 = \sum_{e \in E(D \restriction U)} \big(f(e) - f(e)\big) = \sum_{v \in U} \left(\sum_{e \leftarrow v} f(e) - \sum_{e \rightarrow v} f(e) \right) - \left(\sum_{e \leftarrow U} f(e) - \sum_{e \rightarrow U} f(e) \right) =$$

$$= \left(\sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \rightarrow z} f(e) \right) - \left(\sum_{e \leftarrow U} f(e) - \sum_{e \rightarrow U} f(e) \right) = \|f\| - \|X\| \ , \quad \text{tj. } \|f\| = \|X\| \, .$$

□

Z důkazu Algoritmu 9.9 pak odvodíme několik zajímavých faktů:

`Fakt`: Pokud zajistíme, že Algoritmus 9.9 vždy skončí, zároveň tím dokážeme i platnost Věty 9.7.

`Fakt`: Pro *celočíselné* kapacity hran sítě S Algoritmus 9.9 vždy *skončí*.

`Fakt`: Existují snadná vylepšení Algoritmu 9.9 (jako Edmonds–Karp či Dinitz), u kterých je zaručeno, že výpočet vždy *skončí*. Obecně k dosažení tohoto cíle postačí vždy uvažovat pouze *nejkratší* nenasycené cesty, což je ale mimo dosah našeho kurzu.

Pro další využití v teorii grafů je asi nejdůležitější tento poznatek:

Důsledek 9.11. *Pokud jsou kapacity hran sítě S celočíselné, optimální tok také vyjde celočíselně.*

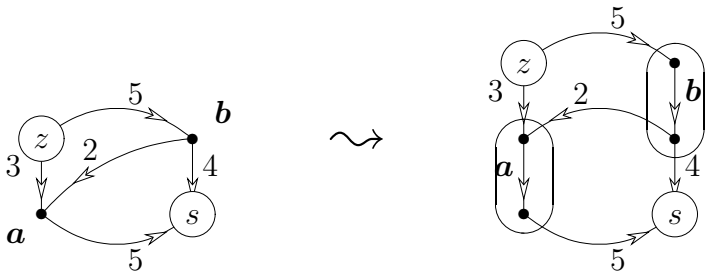
`Důkaz`: Postupujeme jednoduchou indukcí podle iterací Algoritmu 9.9:
Algoritmus začíná s celočíselným tokem 0. V každé další iteraci bude na počátku tok všemi hranami celočíselný, tudíž i rezervy kapacit hran vyjdou (rozdílem od celočíselné kapacity) celočíselně. Proto i hodnoty toku budou změněny jen celočíselně, což zakončuje indukční krok. □

9.4 Zobecněné použití sítí

Pojmy sítě a toků v ní lze v kombinatorické optimalizaci zobecnit a využít několika směry. My si zde stručně uvedeme následující možnosti.

- **Sítě s kapacitami vrcholů:**

  U sítě můžeme zadat *kapacity vrcholů*, neboli kapacitní váhová funkce je dána jako $w : E(D) \cup V(D) \to \mathbb{R}^+$. Takovou síť „zdvojením“ vrcholů snadno převedeme na běžnou síť, ve které kapacity původních vrcholů budou uvedeny u nových hran spojujících zdvojené vrcholy. Viz neformální schéma:



- **Sítě s dolními kapacitami:**

  Pro hrany sítě lze zadat také jejich *minimální kapacity*, tedy dolní meze přípustného toku, jako váhovou funkci $\ell : E(D) \to \mathbb{R}_0^+$. Přípustný tok pak musí splňovat $\ell(e) \leq f(e) \leq w(e)$ pro všechny hrany e. V této modifikaci úlohy již přípustný tok *nemusí vůbec existovat*, takže postup řešení musí zavést počáteční fázi, ve které se *nějaký* tok splňující minimální kapacity nalezne vhodnou úpravou zadané sítě. Poté se pokračuje metodou nenasycených cest.

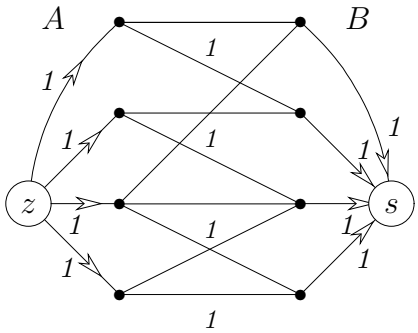
Bipartitní párování

Bipartitní grafy jsou grafy, jejichž vrcholy lze rozdělit do dvou množin tak, že všechny hrany vedou jen mezi těmito množinami, neboli podgrafy úplných bipartitních grafů.

`Definice`: *Párování* v (nyní bipartitním) grafu G je podmnožina hran $M \subset E(G)$ taková, že žádné dvě hrany z M nesdílejí koncový vrchol.

> `Komentář:` Úlohu nalézt v daném bipartitním grafu co největší párování lze poměrně snadno vyřešit pomocí toků ve vhodně definované síti. Uvedená metoda použití toků v síti na řešení problému párování přitom hezky ilustruje obecný přístup, jakým toky v sítích pomohou řešit i úlohy, které na první pohled se sítěmi nemají nic společného.

Metoda 9.12. ***Nalezení bipartitního párování***
Pro daný bipartitní graf G s vrcholy rozdělenými do množin A, B sestrojíme síť S následovně:



- Všechny hrany sítě S orientujeme od zdroje do stoku a přiřadíme jim kapacity 1.
- Nyní najdeme (celočíselný) maximální tok v S Algoritmem 9.9. Do párování vložíme ty hrany grafu G, které mají nenulový tok.

`Důkaz` správnosti Metody 9.12: Podle Důsledku 9.11 bude maximální tok celočíselný, a proto každou hranou poteče buď 0 nebo 1. Jelikož však do každého vrcholu v A může ze zdroje přitéct jen tok 1, bude z každého vrcholu A vybrána do párování nejvýše jedna hrana. Stejně tak odvodíme, že z každého vrcholu B bude vybrána nejvýše jedna hrana, a proto vybraná množina skutečně bude párováním. Zároveň to bude největší možné párování, protože z každého párování lze naopak vytvořit tok příslušné velikosti a větší než nalezený tok v S neexistuje. □

`Poznámka`: Popsaná metoda je základem tzv. Maďarského algoritmu pro párování v bipartitních grafech. Úlohu nalezení maximálního párování lze definovat i pro obecné grafy a také ji efektivně algoritmicky vyřešit, ale příslušný algoritmus [Edmondsův] není jednoduchý.

Výběr různých reprezentantů

`Definice`: Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. *Systémem různých reprezentantů* množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nazýváme takovou posloupnost *různých* prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, že $x_i \in M_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

Důležitým a dobře známým výsledkem v této oblasti je Hallova věta plně popisující, kdy lze systém různých reprezentantů daných množin nalézt.

Věta 9.13. *Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. Pro tyto množiny existuje systém různých reprezentantů, právě když platí*

$$\forall J \subseteq \{1, 2, \ldots, k\} : \left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|\,,$$

neboli pokud sjednocení libovolné skupiny z těchto množin má alespoň tolik prvků, kolik množin je sjednoceno.

Důkaz: Označme $x_1, x_2, \ldots, x_m$ po řadě všechny prvky ve sjednocení $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$. Definujeme si bipartitní graf G na množině vrcholů $\{1, 2, \ldots, k\} \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \cup \{u, v\}$, ve kterém jsou hrany $\{u, i\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, hrany $\{v, x_j\}$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$ a hrany $\{i, x_j\}$ pro všechny dvojice i, j, pro které $x_j \in M_i$.

Komentář: Konstrukce našeho grafu G je obdobná konstrukci sítě v Metodě 9.12: Vrcholy u a v odpovídají zdroji a stoku, ostatní hrany přicházející do vrcholu x_j znázorňují všechny z daných množin, které obsahují prvek x_j.

Cesta mezi u a v má tvar u, i, x_j, v, a tudíž ukazuje na reprezentanta $x_j \in M_i$. Systém různých reprezentantů tak odpovídá k disjunktním cestám mezi u a v. Nechť X je nyní *libovolná minimální* množina vrcholů v G, neobsahující samotné u a v, po jejímž odebrání z grafu nezbude žádná cesta mezi u a v. Podle této úvahy mají naše množiny systém různých reprezentantů, právě když každá taková oddělující množina X má aspoň k prvků.

Položme $J = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus X$. Pak každá hrana z J (mimo u) vede do vrcholů z $X \cap \{x_1, \ldots, x_m\}$ (aby nevznikla cesta mezi u, v), a proto

$$\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| = |X \cap \{x_1, \ldots, x_m\}| = |X| - |X \cap \{1, \ldots, k\}| = |X| - k + |J|\,.$$

(První rovnost vyplývá z minimality množiny X.) Vidíme tedy, že $|X| \geq k$ pro všechny (minimální) volby oddělující X, právě když $\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|$ pro všechny volby J, což je dokazovaná podmínka naší věty. □

Poznámka: Tento důkaz nám také dává návod, jak systém různých reprezentantů pro dané množiny nalézt – stačí použít Algoritmus 9.9 na vhodně odvozenou síť.

Rozšiřující studium

Orientované grafy v obvyklých učebnicích teorie grafů mnoho místa nemají a speciálně v češtině není mnoho zdrojů věnujících se přímo orientovaným grafům. Mnohé aspekty grafů (včetně některých grafových algoritmů) však zůstávají stejné i v orientovaném podání, jak můžeme vidět třeba v otázkách isomorfismu či hledání nejkratší cesty. Otázky síťových toků a silné souvislosti studované v této lekci však dostávají na orientovaných grafech "nový rozměr"nemající v neorientovaných grafech rozumné obdoby - pro ně je směr hran podstatný. My se zde hlouběji orientovanými grafy nezabýváme, ale zájemce odkazujeme především na algoritmické zdroje a kurzy, neboť úloha síťových toků je jednou ze základních praktických úloh kombinatorické optimalizace.

10 Formalizace a důkazy pro algoritmy

Úvod

Po předchozí převážně matematické látce se náš výklad obrací bezprostředně k informatice. Mnozí z vás si asi již všimli, že umění programovat není zdaleka jen o tom naučit se syntaxi programovacího jazyka, ale především o schopnosti vytvářet a správně formálně zapisovat algoritmy. Přitom třeba situace, kdy programátorem zapsaný kód ve skutečnosti počítá něco trochu jiného, než si autor představuje, je snad nejčastější programátorskou chybou – o to zákeřnější, že ji žádný „chytrý" překladač nemůže odhalit.

Proto již na počátku studia informatiky je žádoucí klást důraz na správné chápání zápisu algoritmů i na přesné důkazy jejich vlastností a správnosti. A to je téma, kterému se budeme věnovat následující dvě lekce.

Cíle

Bude zaveden způsob formálního zápisu algoritmů pro potřeby dalšího výkladu, nezávisle na konkrétních programovacích jazycích. Na tomto formalismu pak bude ukazováno správné chápání chování algoritmů a příklady důkazů na konkrétních „malých" algoritmech. Nejdůležitější technikou důkazů bude matematická indukce. Na druhou stranu je třeba dodat, že uváděné algoritmy jsou pouze bezvýznamné ilustrativní ukázky pro cvičení důkazů a není úkolem tohoto textu učit čtenáře návrhu algoritmů.

10.1 Formální popis algoritmu

Před samotným závěrem našeho matematického kurzu si položme klíčovou otázku, co je vlastně algoritmus? Když se na tím zamyslíte, asi zjistíte, že to není tak jednoduché přesně říci. Dokonce je to natolik obtížná otázka, že si zde můžeme podat jen docela zjednodušenou (či naivní?) odpověď, přesto však dostatečnou pro zamýšlenou demonstraci matematických důkazů pro běžné algoritmy.

`Poznámka`: Za definici algoritmu je obecně přijímána tzv. *Church–Turingova teze* tvrdící, že všechny algoritmy lze „simulovat" na Turingově stroji. Jedná se sice o přesnou, ale značně nepraktickou definici. Mimo Turingova stroje existují i jiné *matematické modely výpočtů*, jako třeba stroj RAM, který je abstrakcí skutečného strojového kódu, nebo také třeba tzv. neprocedurální (neimperativní) modely zahrnující funkcionální a logické programování.

Konvence 10.1. Zjednodušeně zde *algoritmem* rozumíme konečnou posloupnost elementárních výpočetních *kroků*, ve které každý další krok *vhodně*[1] využívá (neboli závisí na) vstupní údaje či hodnoty vypočtené v předchozích krocích. Tuto závislost přitom pojímáme zcela obecně nejen na operandy, ale i na vykonávané instrukce v krocích.

Pro zápis algoritmu a jeho zpřehlednění a zkrácení využíváme *řídící konstrukce* – podmíněná větvení a cykly.

`Komentář:` Vidíte, jak blízké si jsou konstruktivní matematické důkazy a algoritmy v našem pojetí? Jedná se nakonec o jeden ze záměrů našeho přístupu...

[1] Zvídaví studenti si mohou na tomto místě uvědomit, že ve slůvku „vhodně" se skrývá celá hloubka Church–Turingovy teze. V žádném případě tak nelze mechanicky bez zamyšlení obracet, že by každá posloupnost kroků atd ... byla algoritmem ve smyslu této teze (viz také Lekce 12).

Příklad 10.2. *Zápis algoritmu pro výpočet průměru daného pole* `a[]` *s* `n` *prvky.*
Algoritmus.

- Inicializujeme `sum` $\leftarrow$ `0`;
- postupně pro `i=0,1,2,...,n-1` provedeme
  - `sum` $\leftarrow$ `sum+a[i]`;
- vypíšeme podíl `(sum/n)`. □

Ve „vyšší úrovni“ formálnosti (s jasnějším vyznačením *elementárních kroků* a *řídících struktur* algoritmu) se totéž dá zapsat jako:

Algoritmus 10.3. ***Průměr*** z daného pole `a[]` s `n` prvky.

```
input pole a[] délky n;
sum ← 0;
foreach  i ← 0,1,2,...,n-1  do
    sum ← sum+a[i];
done
res ← sum/n;
output res;
```

Symbolický zápis algoritmů

`Značení`. Pro potřeby symbolického formálního zápisu algoritmů v předmětu FI: IB000 si zavedeme následující pravidla:

- *Proměnné* nebudeme deklarovat ani typovat, pole odlišíme závorkami `p[]`.
- *Přiřazení* hodnoty zapisujeme `a` $\leftarrow$ `b`, případně `a := b`, ale nikdy ne `a=b`.
- Jako elementární operace je možné použít jakékoliv *aritmetické výrazy* v běžném matematickém zápise. Rozsahem a přesností čísel se zde nezabýváme.
- Podmíněné *větvení* uvedeme klíčovými slovy `if ... then ... else ... fi`, kde `else` větev lze vynechat (a někdy, na jednom řádku, i `fi`).
- Pevný *cyklus* uvedeme klíčovými slovy `foreach ... do ... done`, kde část za `foreach` musí obsahovat *předem danou* množinu hodnot pro přiřazování do řídící proměnné.
- *Podmíněný cyklus* uvedeme klíčovými slovy `while ... do ... done`. Zde se může za `while` vyskytovat jakákoliv logická podmínka.
- V zápise používáme jasné *odsazování* (zleva) podle úrovně zanoření řídících struktur (což jsou `if, foreach, while`).
- Pokud je to dostatečně jasné, elementární operace nebo podmínky můžeme i ve formálním zápise *popsat běžným jazykem.*

Vyzbrojeni tímto značením a matematickým aparátem „dokazování“ si nyní můžeme dovolit se podívat na mnohé základní (a jednoduché) algoritmy novým kritickým pohledem.

Co počítá následující algoritmus?

Příklad 10.4. *Je dán následující symbolicky zapsaný algoritmus. Co je jeho výstupem v závislosti na vstupech a, b?*

Algoritmus 10.5.

```
input a, b;
res ← 7;
foreach  i ← 1,2,...,b-1,b  do
    res  ←  res + a + 2·b + 8;
done
output res;
```

Nejprve si zkusmo vypočítáme hodnoty výsledku res v počátečních iteracích cyklu:

$b = 0$: $res = 7$,
$b = 1$: $res = 7 \ + \ a + 2b + 8$,
$b = 2$: $res = 7 \ + \ (a + 2b + 8) \ + \ (a + 2b + 8)$, ...

Co dále? Výčet hodnot naznačuje pravidelnost a závěr, že obecný výsledek po b iteracích cyklu bude mít hodnotu

$$res \ = \ 7 + b(a + 2b + 8) = ab + 2b^2 + 8b + 7\,.$$

Jak však toto dokážeme? Nejlépe asi indukcí podle vstupní hodnoty b, ale to není formálně úplně přesné, neboť s hodnotou b musíme pracovat jako se zcela obecným pevným parametrem a zároveň ji měnit(?) podle potřeb indukce. Pro tuto část odkazujeme do Oddílu 10.3. □

10.2 O „správnosti“ a dokazování programů

Jak se máme přesvědčit, že je daný program počítá „správně“?

* Co třeba ladění programů? Jelikož počet možných vstupních hodnot je (v principu) neohraničený, *nelze otestovat* všechna možná vstupní data.
* Situace je zvláště komplikovaná v případě paralelních, randomizovaných, interaktivních a nekončících programů (operační systémy, systémy řízení provozu apod.). Takové systémy mají *nedeterministické chování* a opakované experimenty vedou k různým výsledkům. (Nelze je tudíž ani rozumně ladit, respektive ladění poskytne jen velmi nedostatečnou záruku správného chování za jiných okolností...)
* V některých případech je však třeba mít naprostou jistotu, že program funguje tak jak má, případně že splňuje základní bezpečnostní požadavky.
  - Pro „malé“ algoritmy je možné podat přesný matematický důkaz správnosti.
  - Narůstající složitosti programových systémů a požadavky na jejich bezpečnost si pak vynucují vývoj jiných „spolehlivých“ formálních *verifikačních metod*.

`Komentář:` Mimochodem, co to vlastně znamená „počítat správně“?

Ukázka formálního důkazu algoritmu

Příklad 10.6. *Je dán následující symbolicky zapsaný algoritmus. Dokažte, že jeho výsledkem je „výměna“ vstupních hodnot a, b.*

Algoritmus 10.7.

```
input a, b;
a ← a+b;
b ← a-b;
a ← a-b;
output a, b;
```

Pro správný formální důkaz si musíme nejprve uvědomit, že je třeba symbolicky odlišit od sebe proměnné `a,b` od jejich daných *vstupních hodnot*, třeba h_a, h_b. Nyní v krocích algoritmu počítáme hodnoty proměnných:

* $a = h_a$, $b = h_b$,
* $a \leftarrow a + b = h_a + h_b, \quad b = h_b$,
* $a = h_a + h_b, \quad b \leftarrow a - b = h_a + h_b - h_b = \underline{h_a}$,
* $a \leftarrow a - b = h_a + h_b - h_a = \underline{h_b}, \quad b = h_a$,

V jednotlivých krocích tak jasně vidíme, že pro *kterékoliv* vstupní hodnoty h_a, h_b bude ve výsledku obsahem proměnné `a` hodnota h_b a obsahem proměnné `b` hodnota h_a. Tímto jsme s důkazem hotovi. □

10.3 Jednoduché indukční dokazování

Příklad 10.6 je poněkud extrémní ukázkou ve smyslu toho, že v praxi jen málokdy zkoumaný algoritmus udělá tak málo kroků, že bychom každý krok mohli studovat zvlášť. Především počet kroků (cyklů či iterací) bývá proměnný a závislý na vstupu a pak musí nastoupit lepší důkazové prostředky, především *matematická indukce*, která je „*jako stvořená*“ pro formální uchopení opakovaných sekvencí v algoritmech.

Příklad 10.8. *Dokažte, že následující algoritmus v závislosti na vstupech a, b navrátí výsledek $ab + 2b^2 + 8b + 7$ (viz Příklad 10.4).*

Algoritmus 10.9.

```
input a, b;
res ← 7;
foreach  i ← 1,2,...,b-1,b  do
    res  ←  res + a + 2·b + 8;
done
output res;
```

V prvé řadě si z důvodu formální přesnosti přeznačíme mez cyklu v algoritmu na `foreach i ← 1,2,...,c do ..` (kde $c = b$). To děláme proto, že jinak by se nám pletla hodnota b vstupující do přiřazení do proměnné *res* s hodnotou počtu provedených iterací cyklu. Poté postupujeme přirozeně indukcí podle počtu c iterací (už nezávisle na vstupní hodnotě b); dokazujeme, že výsledek výpočtu algoritmu bude

$$res = (a + 2b + 8)c + 7 = ac + 2bc + 8c + 7\,.$$

Pro $c = 0$ je výsledek správně $res = 0 + 7$. Pokud dále předpokládáme platnost vztahu $res = ac + 2bc + 8c + 7$ po nějakých c iteracích cyklu `foreach`, tak následující iterace pro $i \leftarrow c + 1$ (jejíž průběh na samotné hodnotě i nezáleží) změní hodnotu na

$$\begin{aligned} res \;&\leftarrow\; res + a + 2b + 8 = ac + 2bc + 8c + 7 \;+\; a + 2b + 8 = \\ &= a(c+1) + 2b(c+1) + 8(c+1) + 7\,. \end{aligned}$$

Důkaz indukcí je tím hotov. □

Příklad 10.10. *Zjistěte, kolik znaků* `'x'` *v závislosti na celočíselné hodnotě* n *vstupního parametru* `n` *vypíše následující algoritmus.*

Algoritmus 10.11.

```
foreach  i ← 1,2,3,...,n-1,n  do
    foreach  j ← 1,2,3,...,i-1,i  do
        vytiskni  'x';
    done
done
```

Nejprve si uvědomíme, že druhý (vnořený) cyklus vždy vytiskne celkem i znaků `'x'`. Proto iterací prvního cyklu (nejspíše) dostaneme postupně $1 + 2 + \cdots + n$ znaků `'x'` na výstupu, což již víme (Příklad 2.8), že je celkem $\frac{1}{2}n(n+1)$. Budeme tedy dokazovat následující tvrzení:

Věta. Pro každé přirozené n Algoritmus 10.11 vypíše právě $\frac{1}{2}n(n+1)$ znaků `'x'`.

`Důkaz`: Postupujeme indukcí podle n. Báze pro $n = 0$ je zřejmá, neprovede se ani jedna iterace cyklu a tudíž bude vytištěno 0 znaků `'x'`, což je správně.

Nechť tedy tvrzení platí pro jakékoliv n_0 a položme $n = n_0 + 1$. Prvních n_0 iterací vnějšího cyklu podle indukčního předpokladu vypíše (ve vnitřním cyklu) celkem $\frac{1}{2}n_0(n_0+1)$ znaků `'x'`. Pak již následuje jen jedna poslední iterace vnějšího cyklu s `i` $\leftarrow$ `n=`n_0`+1` a v ní se vnitřní cyklus `j` $\leftarrow$ `1,2,...,i=n` iteruje celkem $n = n_0 + 1$ -krát. Celkem tedy bude vytištěn tento počet znaků `'x'`:

$$\frac{1}{2}n_0(n_0+1) + n_0 + 1 = \frac{1}{2}(n_0+1+1)(n_0+1) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Důkaz indukčního kroku je hotov. □

10.4 Rekurzivní algoritmy

Rekurentní vztahy posloupností, stručně uvedené v Oddíle 3.4, mají svou přirozenou obdobu v *rekurzivně zapsaných algoritmech*. Zjednodušeně řečeno to jsou algoritmy, které se v průběhu výpočtu odvolávají na výsledky sebe sama pro jiné (pokud možno striktně menší) vstupní hodnoty. U takových algoritmů je zvláště důležité kontrolovat jejich správnost a také proveditelnost. My si tuto oblast algoritmů osvětlíme několika jednoduchými příklady.

Příklad 10.12. *Symbolický zápis jednoduchého rekurzivního algoritmu.*

Algoritmus . Rekurzivní funkce *`factorial(x)`*

```
if x < 1 then  t ← 1;
else  t ← x · factorial(x-1);
return t
```

Co je výsledkem výpočtu? Jednoduše řečeno, výsledkem je *faktoriál* vstupní přirozené hodnoty x, tj. hodnota $x! = x \cdot (x-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$. (Záporné a necelé vstupní hodnoty x pro zjednodušení ignorujeme, ale poctivě napsaný program by si samozřejmě měl přípustnost vstupu kontrolovat sám!) Všimněte si ještě, že algoritmus i pro vstup $x = 0$ správně vyhodnotí $0! = 1$. □

Fibonacciho čísla

Pro další příklad rekurze se vrátíme k Oddílu 3.4, kde byla zmíněna známá Fibonacciho posloupnost $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$. Ve skutečnosti tuto posloupnost budeme uvažovat již od nultého členu, tj. jako $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.

Algoritmus 10.13. Rekurzivní výpočet funkce `fibonacci(x)`
Pro dané přirozené $x \geq 0$ vypočítáme x-té Fibonacciho číslo následovně:

```
if x < 2 then  t ← x;
else  t ←  fibonacci(x-1)+fibonacci(x-2);
return t
```

Komentář: Správnost Algoritmu 10.13 je víceméně zřejmá z jeho přímé podoby s rekurentním vzorcem v definici Fibonacciho čísel. Zamyslete se však, jak je to s praktickou „*proveditelností*“ takového algoritmu... Vidíte (případně si zkuste naprogramovat), že čas výpočtu roste velmi rychle? Třebaže hodnotu $fibonacci(30)$ tímto algoritmem spočítáte poměrně rychle, s výpočtem $fibonacci(40)$ už budete mít větší problémy a $fibonacci(50)$ asi bude mimo vaše možnosti. To skutečně není dobrý algoritmus! Podívejte se také na budoucí Příklad 11.5, který odhaduje, jak mnoho (exponenciálně) kroků výpočtu je potřeba.

Proto si v dalším Příkladu 10.14 uvedeme poněkud (ve skutečnosti velmi výrazně) lepší algoritmus výpočtu, podobající se přirozenému lidskému postupu psaní členů posloupnosti „do řádku na papír“. Doporučujeme si oba algoritmy zkusit implementovat a mezi sebou porovnat.

Příklad 10.14. *Nerekurzivní algoritmus pro Fibonacciho čísla.*
Dokažte, že následující algoritmus pro každé přirozené n počítá tutéž hodnotu jako rekurentní funkce `fibonacci(n)` v Algoritmu 10.13 (ale mnohem mnohem rychleji).

Algoritmus .

```
input n;
b[0] ← 0;  b[1] ← 1;
foreach  i ← 2,3,...,n  do
    b[i]  ←  b[i-1]+b[i-2];
done
output b[n]
```

Důkaz: Indukcí podle řídící proměnné i budeme dokazovat, že po i-té iteraci cyklu algoritmu bude vždy platit $b[i] = fibonacci(i)$: Co se týče báze indukce, toto vyplývá z úvodního přiřazení. Pro libovolné $i \geq 2$ předpokládáme platnost indukčního předpokladu $b[j] = fibonacci(j)$ pro $j \in \{i-1, i-2\}$. V i-té iteraci cyklu pak nastane $b[i] \leftarrow b[i-1]+b[i-2] = fibonacci(i-1)+fibonacci(i-2) = fibonacci(i)$ podle definice. Tím je důkaz hotov pro hodnotu $i = n$. □

Rozšiřující studium

Náš výklad pohlíží na algoritmy a programování tzv. procedurálním neboli imperativním paradigmatem. Vedle toho existují i jiné přístupy k programování, jako zmíněné funkcionální *nebo* logické*. Na FI se s jinými přístupy studenti seznámí třeba v předmětu Neimperativní programování. Pro náš předmět však výběr výpočetního paradigmatu není nejdůležitější.*

Smyslem této lekce bylo především ukázat, že u jednoduchých algoritmů lze (a je vhodné) je matematicky formálně zapisovat i dokazovat jejich správnost. Samozřejmě je iluzorní předpokládat, že obdobné důkazy správnosti podáme i pro velké softwarové projekty čítající až milióny řádků, ale postupy a techniky naučené při ověřování jednoduchých algoritmů s úspěchem využijete i při kontrole a ladění jednotlivých kousků velkých projektů.

O mnoha různých pokročilých technikách formální verifikace *programů se v případě zájmu dozvíte v pokračujícím studiu. Tyto techniky jsou schopny na vhodném „modelu“ rutinně a matematicky přesně ověřovat (ne)existenci mnoha běžných programátorských chyb.*

11 Pokročilé dokazování nad algoritmy

Úvod

Přímo navazujeme na Lekci 10 a pokračujeme v ukázkách matematického dokazování nad vybranými krátkými algoritmy. Výklad již bude trochu náročnější a místo uměle přichystaných (a v podstatě triviálních) příkladů se budeme věnovat i několika obecným dobře známým algoritmům. Dá se říci, že tato lekce je „vrcholem" v naší snaze o matematické dokazování algoritmů v informatice. Soustřeďte se v ukázkách důkazů na pochopení, jak jednotlivé formální matematické kroky korespondují s průběhem algoritmů.

Cíle

Naší snahou v těchto dvou lekcích je čtenáři ukázat poměrně vyčerpávající přehled způsobů a triků, které lze využít k analýze a dokazování správnosti rozumně krátkých algoritmů. Tyto poznatky by měly základem toho, aby si čtenář jako programátor uměl po sobě své algoritmy „přečíst" a ověřit jejich skutečnou správnost na lokální úrovni.

11.1 Dokazování konečnosti algoritmu

Co bývá snad ještě horší, než chybný výsledek algoritmu? Je to situace, kdy spuštěný algoritmus běží „do nekonečna" a vůbec se nezastaví.

`Komentář:` Všimněte si, že jsme se zatím v důkazech Lekce 10 vůbec nezamýšleli nad tím, zda naše algoritmy vůbec skončí. (To není samozřejmé a důkaz konečnosti je nutno v obecnosti podávat!) Prozatím jsme však ukazovali algoritmy využívající jen `foreach` cykly, přitom podle naší konvence obsahuje `foreach` cyklus předem danou konečnou množinu hodnot pro řídící proměnnou, neboli náš `foreach` cyklus vždy musí skončit. Ale už v příštím algoritmu využijeme `while` cyklus, u kterého vůbec není jasné *kdy a jestli skončí*, a tudíž bude potřebný i důkaz konečnosti.

Právě nad takovou situací a její možnou prevencí se v tomto oddíle zamyslíme. Předesíláme, že další podnětná látka k témuž tématu se nachází ještě v Lekci 12.

Příklad 11.1. *Zastaví se vždy výpočet následujícího primitivního algoritmu?*

Algoritmus 11.2.

```
input x;
while  x>5  do
    x ← x+1;
done
output x
```

Odpověď je samozřejmě NE, jak každý vidí pro jakýkoliv vstup `x` větší než 5. Jak však tuto negativní odpověď matematicky dokázat? To není zcela jednoduché, a proto si pomůžeme následujícím trikem:

- Předpokládejme pro spor, že Algoritmus 11.2 někdy skončí pro $x > 5$. Nechť přirozené $n > 5$ je zvoleno tak, že Algoritmus 11.2 skončí pro $x = n$ po nejmenším možném počtu ℓ průchodů cyklem `while`.

Pak jistě $\ell > 0$, neboť na začátku je podmínka `x>5` splněna z definice n. Po prvním průchodu pak $x = n + 1 > 5$, avšak nyní již Algoritmus 11.2 musí skončit po $\ell - 1 < \ell$ dalších průchodech cyklu. To je *spor* s volbou $x = n$ coby vstupní hodnoty s nejmenším

možným počtem průchodů (pro $x = n + 1$ totiž do ukončení výpočtu proběhne o jeden průchod méně – o ten jeden vykonaný na začátku naší úvahy). □

Když algoritmus vždy končí

Na rozdíl od předchozí ukázky se budeme dále věnovat pozitivním případům, kdy algoritmy poslušně končí své výpočty.

Metoda 11.3. ***Jednoduchý důkaz konečnosti.***
Máme-li za úkol dokázat, že algoritmus skončí, vhodný postup je následující:

* Sledujeme zvolený celočíselný a zdola ohraničený *parametr algoritmu* (třeba přirozené číslo) a dokážeme, že se jeho hodnota v průběhu algoritmu neustále *ostře zmenšuje*.
* Případně předchozí přístup rozšíříme na zvolenou *k-tici přirozených parametrů* a dokážeme, že se jejich hodnoty v průběhu algoritmu lexikograficky ostře zmenšují.

Jedná se zde vlastně o vhodné (a zjednodušené pro daný účel) využití principu matematické indukce. Pozor, naše „parametry“ vůbec nemusejí být proměnnými v programu, a přesto jsou s programem implicitně nerozlučně svázány.

`Komentář:` Například pro rekurzivní funkci `factorial(x)` z Příkladu 10.12 přímo využijeme parametr `x`, který se ostře zmenšuje, pro snadný důkaz ukončenosti.

Zamyslíme-li se nad Metodou 11.3 do hloubky (matematické), zjistíme, že stejně jako matematická indukce je založená na této vlastnosti: V každé podmnožině přirozených čísel existuje jedno nejmenší (tomu se říká *dobré uspořádání*). Proto garance zmenšování přirozené hodnoty parametru algoritmu prostě musí znamenat ukončenost jeho výpočtu, bez ohledu na to, co náš vymyšlený parametr znamená. Nejlépe je to ilustrovat názornými příklady.

Příklad 11.4. *Dokažte, že následující algoritmus vždy skončí pro jakýkoliv přirozený vstup x.*

Algoritmus .

```
input  x;
while  x<100  do
    y ← 0;   x ← x+1;
    while  y<x  do
        y ← y+1;
    done
done
```

Postupujme podle Metody 11.3 – jak však dosáhneme „zmenšování parametru“, když hodnoty proměnných `x,y` se zvětšují? To není až tolik obtížné, prostě budeme hodnoty `x,y` vhodně odečítat od velké konstanty. Vtip je v tom dobře zvolit vzorec parametru (vlastním odhadem chování algoritmu doplněným o poznání, že v proměnných `x,y` se nevyskytnou nikdy hodnoty větší než 100):

$$p(x, y) \;=\; 101^2 - 101 \cdot x - y$$

Pak je již rutinou dokázat, že v průběhu algoritmu (tj. pokud se aspoň jednou vnoří do cyklu) je vždy $p(x, y) > 0$ a v každém průchodu vnějšího i vnitřního cyklu se $p(x, y)$ ostře zmenší. Čtenář nechť si toto ověří sám. □

Příklad 11.5. *Dokažte, že následující algoritmus (viz dřívější 10.13) vždy skončí pro jakýkoliv přirozený vstup x.*

Algoritmus . Rekurzivní výpočet funkce *fibonacci(x)* pro přirozené x.

```
if x < 2 then  t ← x;
else  t ←  fibonacci(x-1)+fibonacci(x-2);
return t
```

Nyní je na první pohled přirozené sledovat přímo parametr `x`. Indukcí podle něj pak snadno odvodíme, že výpočet *fibonacci*`(x)` vždy skončí, neboť jsou rekurzivně volány jen menší hodnoty parametru. V čem je tedy možný nedostatek tohoto přímého přístupu? V zásadě pouze jediný; nezískáme z něj žádný rozumný horní odhad počtu kroků algoritmu. Pro vysvětlení, problém spočívá zhruba v tom, že v bodě *fibonacci*`(x-1)+`*fibonacci*`(x-2)` se výpočet „rozvětvuje“ a my musíme vhodným způsobem umět sečíst počty kroků obou větví.

Na druhou stranu při trikové volbě parametru $p(x) = 2^x$ pro použití Metody 11.3 v každé iteraci rekurzivního volání *fibonacci*`(x)` pro $x \geq 2$ v součtu nastane

$$p(x-1) + p(x-2) = 2^{x-1} + 2^{x-2} \leq 2 \cdot 2^{x-1} - 1 < 2^x.$$

Co přesně znamenají slova „v součtu“? To je, že všechny větve rekurzivního výpočtu *dohromady* na jedné úrovni sníží sledovaný parametr. Počet iterací výpočtu *fibonacci*`(n)` tak bude vždy nejen konečný, ale podle uvedené úvahy přímo striktně menší než $p(n) = 2^n$.

Přesto, tento algoritmus je velmi pomalý a mnohem lepšího výpočetního času výpočtu Fibonacciho čísel dosáhneme třeba s alternativním algoritmem Příkladu 10.14. □

Dodatek: Jak konstruovat cykly permutace

Pro mírně složitější ilustraci výše uvedeného konceptu dokazování konečnosti se podíváme na snadný postup nalezení rozkladu permutace na cykly, u kterého však vůbec není na první pohled jasné, zda má skončit.

Algoritmus 11.6. ***Cykly permutace.***
Pro danou permutaci π na n-prvkové neprázdné množině $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ vypíšeme její cykly (viz Oddíl 6.2) takto:

```
U ← {1,2,...,n} = A;
while  U≠∅  do
    x ← min(U);    (nejmenší prvek množiny)
    začínáme výpis cyklu '⟨' ;
    while  x∈U  do
        vytiskneme x;
        U ← U\{x} ;   x ← π(x) ;
    done
    ukončíme výpis cyklu '⟩' ;
done
```

Jak dokážeme správnost a konečnost tohoto algoritmu? Platí, že přímá aplikace indukce podle n nepřinese nic podstatného. Důkaz si tentokrát rozdělíme na dvě části (podle dvou `while` cyklů).

Věta. Za předpokladu, že vnitřní `while` cyklus pro jakoukoliv počáteční volbu `x` skončí, vypíše cyklus permutace π obsahující x a odebere všechny prvky tohoto cyklu z množiny `U`, Algoritmus 11.6 vždy skončí se správným výsledkem.

`Důkaz`: Postupujeme indukcí podle počtu cyklů v permutaci π. Jediný cyklus v π (báze indukce) je vypsán dle předpokladu věty a množina U zůstane prázdná, tudíž vnější `while` cyklus skončí po první iteraci a výsledek je správný.

Podlě Věty 6.3 se každá permutace dá zapsat jako složení disjunktních cyklů. Nechť π je tedy složena z $\ell > 1$ cyklů. Po první iteraci `while` cyklu zbude v restrikci permutace π na množinu U celkem $\ell - 1$ cyklů. Podle indukčního předpokladu pak tyto zbylé cykly budou správně vypsány a algoritmus skončí. □

`Komentář:` Vidíte, že v tomto důkaze indukcí je indukční krok zcela triviální a důležitý je zde především základ indukce?

Věta. Pokud π je permutace, tak vnitřní `while` cyklus vždy skončí a nalezne v π cyklus obsahující libovolný počáteční prvek $x \in U$. Navíc všechny prvky nalezeného cyklu odebere z množiny U.

`Důkaz`: Zde přímo zopakujeme argument důkazu Věty 6.3: Vezmeme libovolný prvek $x = x_1 \in U$ a iterujeme zobrazení $x_{i+1} = \pi(x_i)$ pro $i = 1, 2 \ldots$, až dojde ke zopakování prvku $x_k = x_j$ pro $k > j \geq 1$. (To musí nastat, neboť A je konečná.) Jelikož prvek x_j byl již odebrán z U, v kroku $x = x_k$ dojde k ukončení našeho `while` cyklu. Nadto je π prostá, a proto nemůže nastat $x_k = x_j = \pi(x_{j-1})$ pro $j > 1$. Takto byl nalezen a odebrán z U cyklus $\langle a_1, \ldots, a_{k-1} \rangle$ a důkaz je hotov. □

11.2 Přehled technik důkazu indukcí

Doposud v našem textu byla matematická indukce představována ve své přímočaré formě, kdy dokazované tvrzení obvykle přímo nabízelo celočíselný parametr, podle nějž bylo potřebné indukci vést. Indukční krok pak prostě zpracoval přechod „$n = i \to n = i+1$“. To však u dokazování správnosti algoritmů typicky neplatí a našim cílem zde je ukázat možné techniky, jak správně indukci na dokazování algoritmů aplikovat. Uvidíme, jak si z nabízejících se parametrů správně vybrat a jak je případně kombinovat.

Technika fixace parametru

První technika důkazu prostě dopředu za některé parametry dosazuje (obecně zvolené) konstanty. Tato technika je vhodná pro případy, kdy je sice v algoritmu více parametrů, ale „zjevně“ dochází ke změně jen jednoho (nebo části) z nich a chování algoritmu ke zbylým „neměnným“ parametrům je dobře předvídatelné.

Příklad 11.7. *Mějme následující algoritmus. Co je jeho výsledkem výpočtu?*

Algoritmus .

```
input  x, y;
res ← 0;
while  x>0  do
    res ← res+y;   x ← x-1;
done
output  res;
```

Sledováním algoritmu zjistíme, že hodnota proměnné `res` bude narůstajícím součtem $y + \cdots + y$, dokud se `x` nesníží na nulu. Poté odhadneme:

Věta. Pro každé $x, y \in \mathbb{N}$ Algoritmus 11.7 vypočítá hodnotu součinu $res = x \cdot y$.

Jaký je vhodný postup k důkazu tohoto tvrzení indukcí? Je snadno vidět, že na hodnotě vstupu `y` vlastně nijak podstatně nezáleží (lze `y` *fixovat*) a důležité je sledovat `x`. Tato úvaha nás dovede k následujícímu:

`Důkaz`: Budiž $h_y \in \mathbb{N}$ libovolné ale pro další úvahy *pevné*. Dokážeme, že pro každý vstup $x \in \mathbb{N}$ je výsledkem výpočtu hodnota $r_0 + x \cdot h_y$, kde h_y byla hodnota vstupu `y` a r_0 byla hodnota v pracovní proměnné `res` na začátku uvažovaného výpočtu (pro potřeby indukce, $r_0 = 0$ na úplném začátku). Podle principu matematické indukce uplatněné na parametr x dostáváme snadno:

* *Báze* $x = 0$ znamená, že tělo cyklu ve výpočtu ani jednou neproběhne a výsledkem bude počáteční r_0.
* *Indukční krok*. Nechť je tvrzení známo pro $x = i$ a uvažujme nyní vstup $x = i+1 > 0$. Prvním průchodem cyklem se uloží $res \leftarrow res + y = r_0 + h_y = r_1$ a $x \leftarrow x - 1 = i$. Počáteční hodnota pracovní proměnné `res` nyní (pro naše indukční úvahy) tudíž je $r_0 + h_y = r_1$ a podle indukčního předpokladu je pak výsledkem výpočtu hodnota

$$r_1 + i \cdot h_y = (r_0 + h_y) + i \cdot h_y = r_0 + (i+1) \cdot h_y = r_0 + x \cdot h_y \,.$$

Důkaz matematickou indukcí je tímto ukončen. □

`Komentář:` Všimněte si, že techniku fixace parametru jsme mlčky použili již v Příkladě 10.8.

Indukce k součtu parametrů

Druhou techniku je vhodné použít především v případech, kdy se v průběhu algoritmu vždy některý parametr zmenšuje, ale pokaždé je to některý jiný parametr, takže v indukci se nelze zaměřit jen na jeden z nich. Jedná se spíše o situaci u rekurzivních algoritmů.

Příklad 11.8. *Je dán následující rekurentní algoritmus.*

Algoritmus . Funkce ***kombinacni(m,n)*** pro přirozená m, n.

```
res ← 1;
if m>0 ∧ n>0 then
    res ← kombinacni(m-1,n) + kombinacni(m,n-1);
fi
return res;
```

Výše uvedený vzorec (a ostatně i název funkce) naznačuje, že funkce má co společného s kombinačními čísly a *Pascalovým trojúhelníkem*

$$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b},$$

je však třeba správně „nastavit“ význam parametrů $a, b \ldots$

Věta. Pro každé parametry $m, n \in \mathbb{N}$ je výsledkem výpočtu funkce ***kombinacni(m,n)*** hodnota $res = \binom{m+n}{m}$ (kombinační číslo) – počet všech m-prvkových podmnožin $(m+n)$-prvkové množiny.

`Důkaz` indukcí vzhledem k součtu parametrů $i = m + n$:

* *Báze* $i = m + n = 0$ pro $m, n \in \mathbb{N}$ znamená, že $m = n = 0$. Zde však s výhodou využijeme tzv. „*rozšíření báze*“ na všechny hraniční případy $m = 0$ nebo $n = 0$ zvlášť. V obou rozšířených případech daná podmínka algoritmu není splněna, a proto výsledek výpočtu bude iniciální `res = 1`. Je toto platná odpověď?

  Kolik je prázdných podmnožin ($m = 0$) jakékoliv množiny? Jedna, $\emptyset$. Kolik je m-prvkových podmnožin ($n = 0$) m-prvkové množiny? Zase jedna, ta množina samotná. Tím je důkaz rozšířené báze indukce dokončen.

* *Indukční krok* přechází na součet $i + 1 = m + n$ pro $m, n > 0$. Nyní je podmínka algoritmu splněna a vykonají se rekurentní volání

  `kombinacni(m-1,n) + kombinacni(m,n-1)` .

  Rekurentní volání se vztahují k výběru podmnožin $m - 1 + n = m + n - 1 = i$-prvkové množiny, například $M = \{1, 2, \ldots, i\}$. Výsledkem tedy je, podle indukčního předpokladu pro součet i, počet $(m - 1)$-prvkových plus m-prvkových podmnožin množiny M.

  Kolik nyní je m-prvkových podmnožin $(i + 1)$-prvkové množiny $M' = M \cup \{i + 1\}$? Pokud ze všech podmnožin odebereme prvek $i + 1$, dostaneme právě m-prvkové podmnožiny (z těch neobsahujících $i + 1$) plus $(m - 1)$-prvkové podmnožiny (z těch původně obsahujících $i + 1$). A to je v součtu rovno `kombinacni(m-1,n) + kombinacni(m,n-1)`, jak jsme měli dokázat. □

Zesílení dokazovaného tvrzení

Velmi častou situací při dokazování algoritmu je, že se zajímáme o hodnoty některých proměnných nebo „výstupy“ některé funkce, ale ke správnému matematickému důkazu musíme „postihnout“ i chování jiných funkcí a proměnných v algoritmu. Taková situace pak typicky vede na potřebu *zesílení požadovaného tvrzení* v matematické indukci.

Příklad 11.9. *Zjistěte, kolik znaků* `'z'` *v závislosti na celočíselné hodnotě* n *vstupního parametru* `n` *vypíše následující algoritmus.*

Algoritmus 11.10.

```
st ← "z";
foreach i ← 1,2,3,...,n-1,n do
    vytiskni řetězec st;
    st ← st . st ;    (zřetězení dvou kopií st za sebou)
done
```

Zkusíme-li si výpočet simulovat pro $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$, postupně dostaneme počty `'z'` jako $0, 1, 3, 7, 15 \ldots$. Na základě toho již není obtížné „uhodnout“, že počet `'z'` bude (asi) obecně určen vztahem $2^n - 1$. Toto je však třeba dokázat!

`Komentář:` Jak záhy zjistíme, matematická indukce na naše tvrzení přímo „nezabírá“, ale mnohem lépe se nám povede s následujícím přirozeným zesílením dokazovaného tvrzení:

Věta. Pro každé přirozené n Algoritmus 11.10 vypíše právě $2^n - 1$ znaků `'z'` a proměnná `st` bude na konci výpočtu obsahovat řetězec 2^n znaků `'z'`.

`Důkaz`: Postupujeme indukcí podle n. Báze pro $n = 0$ je zřejmá, neprovede se ani jedna iterace cyklu a tudíž bude vytištěno $0 = 2^0 - 1$ znaků `'z'`, což bylo třeba dokázat. Mimo to proměnná `st` iniciálně obsahuje $1 = 2^0$ znak `'z'`.

Nechť tedy tvrzení platí pro jakékoliv n_0 a položme $n = n_0 + 1$. Podle indukčního předpokladu po prvních n_0 iteracích bude vytištěno $2^{n_0} - 1$ znaků `'z'` a proměnná `st` bude obsahovat řetězec 2^{n_0} znaků `'z'`. V poslední iteraci cyklu (pro `i` $\leftarrow$ `n=n`$_0$`+1`) vytiskneme dalších 2^{n_0} znaků `'z'` (z proměnné `st`) a dále řetězec `st` „zdvojnásobíme“. Proto po n iteracích bude vytištěno celkem $2^{n_0} - 1 + 2^{n_0} = 2^{n_0+1} - 1 = 2^n - 1$ znaků `'z'` a v `st` bude uloženo $2 \cdot 2^{n_0} = 2^{n_0+1} = 2^n$ znaků `'z'`. □

11.3 Zajímavé algoritmy aritmetiky

Pro další ukázky důkazových technik pro algoritmy se podíváme na některé krátké algoritmy z oblasti aritmetiky. Například „zbytkové“ umocňování na velmi vysoké exponenty je podkladem známé RSA šifry:

Algoritmus 11.11. ***Binární postup umocňování.***
Pro daná čísla a, b vypočteme jejich celočíselnou mocninu (omezenou na zbytkové třídy modulo m kvůli prevenci přetečení rozsahu celých čísel v počítači), tj. $a^b \mod m$, následujícím postupem.

```
res ← 1;
while  b > 0  do
    if  b mod 2 > 0  then res ← (res·a) mod m;
    b ← ⌊b/2⌋;   a ← (a·a) mod m;
done
output res;
```

K důkazu správnosti algoritmu použijeme indukci podle délky ℓ binárního zápisu čísla b.

Věta. Algoritmus 11.11 skončí a vždy správně vypočte hodnotu $a^b \mod m$.

`Důkaz`: Báze indukce je pro $\ell = 1$, kdy $b = 0$ nebo $b = 1$. Přitom pro $b = 0$ se cyklus vůbec nevykoná a výsledek je $res = 1$. Pro $b = 1$ se vykoná jen jedna iterace cyklu a výsledek je $res = a \mod m$.

Nechť tvrzení platí pro $\ell_0 \geq 1$ a uvažme $\ell = \ell_0 + 1$. Pak zřejmě $b \geq 2$ a vykonají se alespoň dvě iterace cyklu. Po první iteraci budou hodnoty proměnných po řadě

$$a_1 = a^2, \quad b_1 = \lfloor b/2 \rfloor \quad \text{a} \quad res = r_1 = (a^{b \bmod 2}) \mod m\,.$$

Tudíž délka binárního zápisu b_1 bude jen ℓ_0 a podle indukčního předpokladu zbylé iterace algoritmu skončí s výsledkem

$$res = r_1 \cdot a_1^{b_1} \mod m = \left(a^{b \bmod 2} \cdot a^{2\lfloor b/2 \rfloor}\right) \mod m = a^b \mod m\,.$$

□

Euklidův algoritmus

Již z dávných dob antiky pochází následující zajímavý a koneckonců velmi jednoduchý postup–algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou čísel.

Algoritmus 11.12. ***Euklidův pro největšího společného dělitele.***
Pro zadaná přirozená čísla p, q počítá následovně:

```
input  p, q;
while  p>0 ∧ q>0  do
    if  p>q  then  p ← p-q;
    else  q ← q-p;
done
output  p+q;
```

Věta. Pro každé $p, q \in \mathbb{N}$ na vstupu algoritmus vrátí hodnotu největšího společného dělitele čísel p a q, nebo 0 pro $p = q = 0$.

`Důkaz` opět povedeme indukcí podle součtu $i = p + q$ vstupních hodnot. (Jak jsme psali, je to *přirozená volba* v situaci, kdy každý průchod cyklem algoritmu sníží jedno z p, q, avšak není jasné, které z nich.)

- Báze indukce pro $i = p + q = 0$ je zřejmá; cyklus algoritmu neproběhne a výsledek ihned bude 0.
- Ve skutečnosti je zase výhodné uvažovat *rozšířenou bázi*, která zahrnuje i případy, kdy jen jedno z p, q je nulové (Proč? Jedná se o všechny případy, kdy průchod cyklem neproběhne, neboli touto indukcí sledujeme *počet průchodů cyklem*.) Pak výsledek $p + q$ bude roven tomu nenulovému z obou sčítanců, což je v tomto případě zároveň jejich největší společný dělitel.
- *Indukční krok.* Mějme nyní vstupní hodnoty $p = h_p > 0$ a $q = h_q > 0$ – tehdy dojde k prvnímu průchodu tělem cyklu našeho algoritmu, přičemž $h_p + h_q = i + 1$. Předpokládejme $h_p > h_q$; poté po prvním průchodu tělem cyklu budou hodnoty $p = h_p - h_q$ a $q = h_q$, přičemž nyní $p + q = h_p \leq h_p + h_q - 1 = i$.

  Podle indukčního předpokladu (jelikož nyní $p + q \leq i$) tudíž výsledkem algoritmu pro vstupy $p = h_p - h_q$ a $q = h_q$ bude největší společný dělitel $NSD(h_p - h_q, h_q)$. Symetricky pro $h_p \leq h_q$ algoritmus vrátí $NSD(h_p, h_q - h_p)$. (Kde $NSD()$ krátce označuje největšího společného dělitele.)

Důkaz proto bude dokončen následujícím Lematem 11.13. □

Lema 11.13. *Pro každá přirozená a, b platí $NSD(a, b) = NSD(a-b, b) = NSD(a, b-a)$.*

`Komentář:` Všimněte si, že dělitelnost je dobře definována i na záporných celých číslech.

`Důkaz`: Ověříme, že $c = NSD(a - b, b)$ je také největší společný dělitel čísel a a b (druhá část je pak symetrická).

∗ Jelikož číslo c dělí čísla $a - b$ a b, dělí i jejich součet $(a - b) + b = a$. Potom c je společným dělitelem a a b.

∗ Naopak nechť d nějaký společný dělitel čísel a a b. Pak d dělí také rozdíl $a - b$. Tedy d je společný dělitel čísel $a - b$ a b. Jelikož c je *největší* společný dělitel těchto dvou čísel, nutně d dělí c a závěr platí. □

Relativně rychlé odmocnění

Na závěr oddílu si ukážeme jeden netradiční krátký algoritmus a jeho analýzu a důkaz ponecháme zde otevřené. Dokážete popsat, na čem je algoritmus založen?

Algoritmus 11.14. ***Celočíselná odmocnina.***
Pro dané přirozené číslo x vypočteme dolní celou část jeho odmocniny $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$:

```
p ← x;   res ← 0;
while  p > 0  do
    while  (res + p)^2 ≤ x  do res ← res + p ;
    p ← ⌊p/2⌋ ;
done
output res ;
```

`Poznámka`: Zamysleli jste se, jaký mají algoritmy v tomto oddíle vlastně význam? Vždyť stejné úlohy jistě sami vyřešíte každý jednou jednoduchou `foreach` smyčkou. Podívejte se však (alespoň velmi zhruba) na počet kroků, které zde uvedené algoritmy potřebují vykonat k získání výsledku, a srovnejte si to s počty kroků oněch „jednoduchých“ algoritmů.

Pro skutečně velká vstupní čísla zjistíte propastný rozdíl – s takovým „jednoduchým“ algoritmem, třeba '`foreach i ← 1,...b do res ← res·a  mod m done`', se pro obrovské hodnoty b výsledku nikdy nedočkáte, kdežto Algoritmus 11.11 stále poběží velmi rychle. (Spočítáte, jak rychle?) Obdobně je tomu u Algoritmu 11.14.

11.4 Dynamický algoritmus

Lekci zakončíme krátkou, ale velmi hezkou ukázkou tzv. *dynamického algoritmu*, který je znám pod jmény Floyd-Warshallův.

> `Komentář`: Klíčovou myšlenkou dynamických algoritmů je rozklad problému na podproblémy, jejichž řešení jsou postupně ukládána pro další možné použití. Metoda je obzvláště vhodná v případech, kdy rozložené podúlohy si jsou podobné a mohou se opakovat.

Metoda 11.15. ***Dynamický výpočet všech nejkratších cest***
mezi vrcholy v grafu G na množině vrcholů $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}\}$.

- Na počátku nechť `d[i,j]` udává 1 (případně váhu–délku hrany $\{v_i, v_j\}$), nebo ∞ pokud hrana mezi i, j není.
- Po kroku $t \geq 0$ nechť platí, že `d[i,j]` udává délku nejkratší cesty mezi v_i, v_j, která užívá pouze vnitřní vrcholy z množiny $\{v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}\}$ (prázdné v $t = 0$).
- Při přechodu z kroku t na následující krok $t + 1$ upravujeme vzdálenost pro každou dvojici vrcholů v_i, v_j – jsou vždy pouhé dvě možnosti:
  - Buď je cesta délky `d[i,j]` z předchozího kroku t stále nejlepší (tj. nově povolený vrchol v_t nám nepomůže),
  - nebo cestu vylepšíme spojením přes nově povolený vrchol v_t, čímž získáme menší vzdálenost `d[i,t]+d[t,j]` → `d[i,j]`. (Nakreslete si obrázek.)
- Po N krocích úprav je výpočet hotov.

Výpočet nejkratších cest

Alternativně si zapíšeme postup této metody až překvapivě krátkým symbolickým algoritmem:

Algoritmus 11.16. ***Výpočet všech nejkratších cest; Floyd–Warshall***

```
input  'Pole d[,] délek hran (nebo ∞) grafu G';
foreach  t ← 0,1,...,N−1  do
    foreach  i ← 0,1,...,N−1, j ← 0,1,...,N−1  do
        d[i,j] ← min( d[i,j], d[i,t]+d[t,j] );
    done
done
output 'Matice vzdáleností dvojic d[,]';
```

`Poznámka`: V praktické implementaci pro symbol ∞ použijeme velkou konstantu, třeba `MAX_INT/2`. (Nelze použít přímo `MAX_INT`, neboť by pak došlo k aritmetickému přetečení.)

Věta 11.17. *Algoritmus 11.16 v poli* `d[i,j]` *správně vypočte vzdálenost mezi každou dvojicí vrcholů* v_i, v_j.

`Důkaz` povedeme matematickou indukcí podle řídící proměnné t cyklu. Báze je snadná – na počátku kroku $t = 0$ udává `d[i,j]` vzdálenost mezi v_i a v_j po cestách, které nemají vnitřní vrcholy (tj. pouze případně existující hranu).

Přejdeme-li na krok $t + 1$, musíme určit nejkratší cestu P mezi v_i a v_j takovou, že P používá (mimo v_i, v_j) pouze vrcholy $\{v_0, v_1, \ldots, v_t\}$. Tuto nejkratší cestu P si hypoteticky představme: Pokud $v_t \notin V(P)$, pak `d[i,j]` již udává správnou vzdálenost. Jinak $v_t \in V(P)$ a označíme P_1 podcestu v P od počátku v_i do v_t a obdobně P_2 podcestu od v_t do konce v_j. Podle indukčního předpokladu je pak délka P rovna `d[i,t]+d[t,j]`.

V kroku $t = N$ jsme hotovi se všemi vrcholy. □

Rozšiřující studium

V oblasti zjišťování a zdůvodňování správnosti algoritmů a počítačových programů existují (mimo heuristických metod jako ladění programů) rozsáhlé sofistikované přístupy souhrnně nazývané souslovím formální verifikace. Pravděpodobně se s některými z nich setkáte při dalším teoretickém studiu, ale obecně leží daleko za hranicemi našeho studijního textu.

Na druhou stranu jsme se na začátku této lekce dotkli jiného zajímavého problému – zda algoritmus skončí svůj výpočet a kolik „kroků“ tento výpočet bude trvat. První podotázka je poměrně abstraktní a zabývá se jí disciplína vyčíslitelnosti, kdežto druhá podotázka počtu kroků výpočtu má velmi konkrétní dopady na praktickou použitelnost algoritmu: Však si sami vyzkoušejte, kolik kroků výpočtu bude trvat „hloupý“ rekurzivní výpočet Fibonacciho čísla! V obecnosti otázky počtu kroků nutných k dokončení výpočtu algoritmu studuje disciplína zvaná výpočetní složitost, která je jistým způsobem schopna předpovědět, zda na daný problém existuje rozumně rychlý přesný algoritmus nebo ne.

12 Nekonečné množiny, Zastavení algoritmu

Úvod

Bystrého čtenáře může snadno napadnout myšlenka, proč se vlastně zabýváme dokazováním správnosti algoritmů a programů, když by to přece (snad?) mohl za nás dělat automaticky počítač samotný. Bohužel to však nejde a je hlavním cílem této lekce ukázat matematické důvody proč tomu tak je.

Konkrétně si dokážeme, že nelze algoritmicky rozhodnout, zda se daný algoritmus na svém vstupu zastaví nebo ne. Hlavními nástroji, které použijeme, budou nekonečné množiny a důkazová technika tzv. Cantorovy diagonály, která se ve velké míře používá právě v teoretické informatice. Touto lekcí se tak krátce vymaníme ze zajetí naivní teorie množin, která právě v této oblasti má své nepřekonatelné limity. (Pro zvídavé – obdobně, ale mnohem složitěji, lze dokázat že ani matematické důkazy nelze obecně algoritmicky konstruovat...)

Cíle

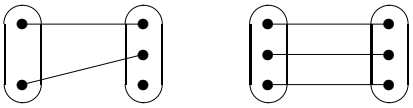
Zavedeme si ve zjednodušeném (a stále „poněkud naivním“) pohledu nekonečné množiny a na nich techniku důkazu Cantorovou diagonálou. Pak tuto klíčovou důkazovou techniku teoretické informatiky využijeme k důkazu algoritmické neřešitelnosti problému zastavení.

12.1 O nekonečných množinách a kardinalitě

Zatímco v naivní teorii jsme si velikost konečné množiny definovali jednoduše jako *počet jejích prvků* vyjádřený přirozeným číslem, pro nekonečné množiny je situace obtížná a mnohem méně intuitivní. Co nám třeba brání zavést pro velikost nekonečné množiny *symbol* ∞? Ponejvíce závažný fakt, že není „nekonečno“ jako „nekonečno“ (Věta 12.2)!

Právě proto si pro určení mohutnosti nekonečných množin musíme vypomoci následujícím příměrem: Velikosti dvou hromádek jablek dokážeme i bez počítání porovnat tak, že budeme z obou hromádek po řadě odebírat dvojice jablek (z každé jedno), až dokud první hromádka nezůstane prázdná – druhá hromádka pak je větší (nebo nejvýše rovna) té první.

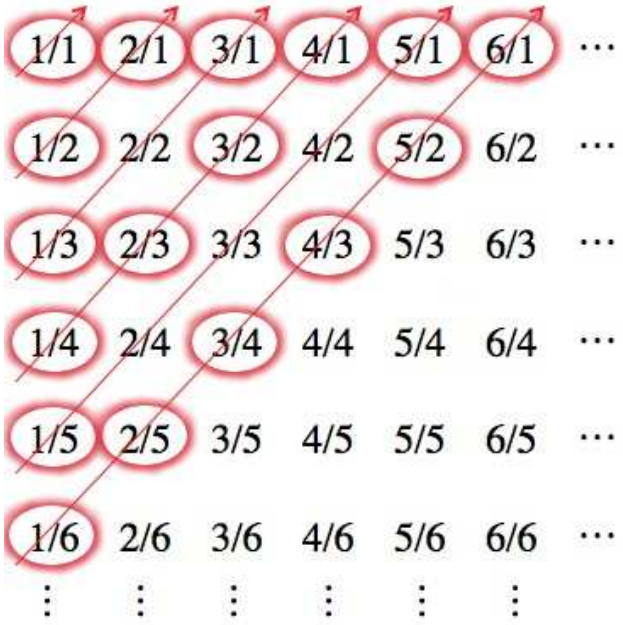
`Definice`: Množina A je „*nejvýše tak velká*“ jako množina B, právě když existuje injektivní funkce $f : A \to B$. Množiny A a B jsou „*stejně velké*“ právě když mezi nimi existuje bijekce. V případech nekonečných množin pak místo “velikosti” mluvíme formálně o jejich *kardinalitě*.



`Komentář:` Uvedená definice kardinality množin „funguje“ velmi dobře i pro nekonečné množiny:

* Například $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ mají stejnou kardinalitu (jsou „stejně velké“, tzv. *spočetně nekonečné*).
* Lze snadno ukázat, že i $\mathbb{Q}$ je spočetně nekonečná, tj. existuje bijekce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, stejně

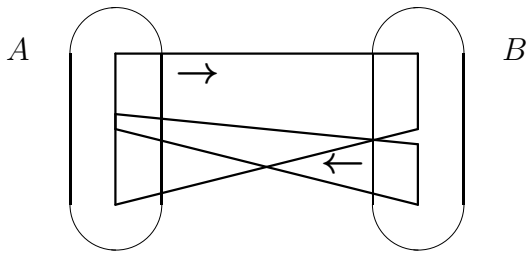
jako bijekce $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$.



* Existují ale i nekonečné množiny, které jsou „striktně větší“ než libovolná spočetná množina (příkladem je $\mathbb{R}$ ve Větě 12.2).
* Později dokážeme, že existuje nekonečná posloupnost nekonečných množin, z nichž *každá je striktně větší než všechny předchozí.*

Pro porovnávání velikostí množin někdy s výhodou využijeme následující přirozené, ale nelehké tvrzení (bez důkazu):

Věta 12.1. *Pro libovolné dvě množiny A, B (i nekonečné) platí, že pokud existuje injekce $A \to B$ a zároveň i injekce $B \to A$, pak existuje bijekce mezi A a B.*



Cantorova diagonála, aneb kolik je reálných čísel

Prvním klíčovým poznatkem ukazujícím na neintuitivní chování nekonečných množin je následující důkaz, který dal historicky vzniknout metodě tzv. *Cantorovy diagonály.*

Věta 12.2. *Neexistuje žádné surjektivní zobrazení $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Důsledek 12.3. *Neexistuje žádné injektivní (tudíž ani bijektivní) zobrazení $h : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$. Neformálně řečeno, reálných čísel je striktně více než všech přirozených.*

Důkaz (Věty 12.2 sporem): Nechť takové g existuje a pro zjednodušení se omezme jen na funkční hodnoty v intervalu $(0,1)$. Podle hodnot zobrazení g si takto můžeme „uspořádat“ dekadické zápisy všech reálných čísel v intervalu $(0,1)$ po řádcích do tabulky:

$$\begin{array}{lllllllllllll} g(0) = & 0. & \mathbf{1} & 5 & 4 & 2 & 7 & 5 & 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & \dots \\ g(1) = & 0. & & \mathbf{4} & & & & & & & & & & \dots \\ g(2) = & 0. & & & \mathbf{1} & & & & & & & & & \dots \\ g(3) = & 0. & & & & \mathbf{3} & & & & & & & & \dots \\ g(4) = & 0. & & & & & \mathbf{9} & & & & & & & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & & & \ddots & & & & & & \end{array}$$

Nyní sestrojíme číslo $\alpha \in (0,1)$ následovně; jeho i-tá číslice za desetinnou čárkou bude 1, pokud v i-tém řádku tabulky na diagonále není 1, jinak to bude 2. V našem příkladě $\alpha = 0.21211\ldots$

Kde se naše číslo α v tabulce nachází? (Nezapomeňme, g byla surjektivní, takže α někde musí být.) Konstrukce však ukazuje, že α se od každého čísla v tabulce liší na aspoň jednom desetinném místě, to je spor. (Až na drobný technický detail s rozvojem $\ldots\bar{9}$.) □

12.2 „Naivní“ množinové paradoxy

Analogickým způsobem k Větě 12.2 lze dokázat následovné zobecnění vyjadřující se o jakékoliv množině a jí přiřazené striktně větší.

Věta 12.4. *Nechť M je libovolná množina. Pak existuje injektivní zobrazení $f : M \to 2^M$, ale neexistuje žádné bijektivní zobrazení $g : M \to 2^M$.*

Důkaz: Dokážeme nejprve existenci f. Stačí ale položit $f(x) = \{x\}$ pro každé $x \in M$. Pak $f : M \to 2^M$ je zjevně injektivní.

Neexistenci g dokážeme sporem. Předpokládejme tedy naopak, že existuje bijekce $g : M \to 2^M$. Uvažme množinu $K \subseteq M$ definovanou takto:

$$K = \{x \in M \mid x \notin g(x)\}.$$

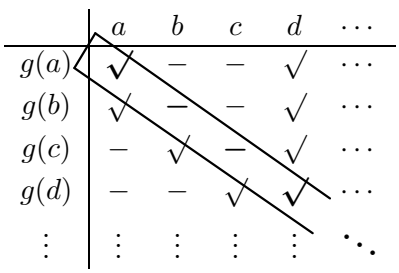
Jelikož g je bijektivní a $K \in 2^M$, musí existovat $y \in M$ takové, že $g(y) = K$. Nyní rozlišíme dvě možnosti:

- $y \in g(y)$. Tj. $y \in K$. Pak ale $y \notin g(y)$ z definice K, spor.
- $y \notin g(y)$. To podle definice K znamená, že $y \in K$, tj. $y \in g(y)$, spor. □

Komentář: Dvě navazující poznámky.

- Technika použitá v důkazech *Vět 12.2* a *12.4* se nazývá *Cantorova diagonální metoda*, nebo také zkráceně *diagonalizace*.

  Konstrukci množiny K lze znázornit pomocí následující tabulky:



Symbol $\surd$ resp. $-$ říká, že prvek uvedený v záhlaví sloupce patří resp. nepatří do množiny uvedené v záhlaví řádku. Tedy např. $d \in g(b)$ a $a \notin g(d)$. Množina K poté obsahuje ty diagonální prvky označené $-$, tj. „převrací“ význam diagonály.

- Z toho, že nekonečna mohou být „různě velká“, lze lehce odvodit řadu dalších faktů. V jistém smyslu je např. množina všech problémů větší než množina všech algoritmů (obě množiny jsou nekonečné), a proto nutně existují problémy, které *nejsou algoritmicky řešitelné*.

Cantorův paradox

Naivní teorie množin, jak jsme si ji uvedli i v tomto předmětu, trpí mnoha neduhy a nepřesnostmi, které vyplynou na povrch především při „neopatrné manipulaci“ s nekonečnými množinami. Abychom se těmto „neopatrnostem“ vyhnuli bez přílišné formalizace, dva základní z těchto paradoxů si nyní ukážeme.

Příklad 12.5. *Uvážíme-li nyní nekonečnou posloupnost množin*

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots$$

kde $A_1 = \mathbb{N}$ *a* $A_{i+1} = 2^{A_i}$ *pro každé* $i \in \mathbb{N}$, *je vidět, že všechny množiny jsou nekonečné a každá je striktně větší než libovolná předchozí.*

Kde však v tomto řazení kardinalit bude „*množina všech množin*“? Na tuto otázku, jak sami asi cítíte, nelze podat odpověď. Co to však znamená? □

∗ Takto se koncem 19. století objevil první *Cantorův paradox* nově vznikající teorie množin.

∗ Dnešní moderní vysvětlení paradoxu je jednoduché, prostě „množinu všech množin“ nelze definovat, taková v matematice neexistuje.

Brzy se však ukázalo, že je ještě *mnohem hůř*...

Russelův paradox

`Fakt`: Není pravda, že *každý soubor prvků* lze považovat za množinu.

∗ Nechť $X = \{M \mid M$ je množina taková, že $M \notin M\}$. Platí $X \in X$?

  – Ano. Tj. $X \in X$. Pak ale X splňuje $X \notin X$.

  – Ne. Pak X splňuje vlastnost $X \notin X$, tedy X je prvkem X, tj., $X \in X$.

∗ Obě možné odpovědi vedou ke sporu. X tedy nelze prohlásit za množinu. Jak je ale něco takového vůbec možné?

`Komentář:` Vidíte u Russelova paradoxu podobnost přístupu s Cantorovou diagonalizací? Russelův paradox se objevil začátkem 20. století a jeho „jednoduchost“ zasahující úplné základy matematiky (teorie množin) si vynutila hledání seriózního rozřešení a rozvoj formální matematické logiky.

Pro ilustraci tohoto paradoxu, slyšeli jste už, že „*v malém městečku žije holič, který holí právě ty muže městečka, kteří se sami neholí*“? Zmíněné paradoxy naivní teorie množin zatím v tomto kurzu nerozřešíme, ale zapamatujeme si, že většina matematických a informatických disciplín vystačí s „*intuitivně bezpečnými*“ *množinami*.

12.3 Algoritmická neřešitelnost problému zastavení

Výše vysvětlené myšlenky diagonalizace a principů základních paradoxů naivní teorie množin sice vypadají „velmi matematicky“. Přesto je však téměř beze změny lze aplikovat i na bytostně informatickou otázku, zda lze algoritmicky poznat, pro které vstupy se daný algoritmus vůbec zastaví. Negativní odpověď na tuto otázku je jedním z fundamentálních výsledků informatiky a přitom má překvapivě krátký a čistý důkaz diagonalizací.

`Fakt`: Uvědomme si (velmi neformálně) několik základních myšlenek.

* Program v každém programovacím jazyce je konečná posloupnost složená z *konečně mnoha* symbolů (písmena, číslice, mezery, speciální znaky, apod.) Nechť Σ je množina všech těchto symbolů. Množina všech programů je tedy jistě podmnožinou množiny $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma^i$, která je spočetně nekonečná. Existuje tedy bijekce f mezi množinou $\mathbb{N}$ a množinou všech programů. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ označme symbolem P_j program $f(j)$. Pro *každý program* P tedy existuje $i \in \mathbb{N}$ takové, že $P = P_i$.

* Každý možný vstup každého možného programu lze zapsat jako *konečnou posloupnost* symbolů z konečné mnočiny Γ. Množina všech možných vstupů je tedy spočetně nekonečná a existuje bijekce g mezi množinou $\mathbb{N}$ a množinou všech vstupů. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ označme symbolem V_j vstup $g(j)$.

* Předpokládejme, že *existuje program Halt*, který pro dané $i, j \in \mathbb{N}$ zastaví s výstupem *ano*/*ne* podle toho, zda P_i pro vstup V_j zastaví, nebo ne.

* Tento předpoklad dále dovedeme ke *sporu* dokazujícímu, že problém zastavení nemá algoritmické řešení.

Věta 12.6. *Neexistuje program Halt, který by pro vstup (P_i, V_j) správně rozhodl, zda se program P_i zastaví na vstupu V_j.*

`Důkaz`: Sporem uvažme program *Diag* s následujícím kódem:

```
input k;
if  Halt(k,k) = ano  then  while true do ; done
```

(Program $Diag(k)$ má na rozdíl od *Halt* jen jeden vstup k, což bude důležité.)

Fungování programu *Diag* lze znázornit za pomocí následující tabulky:

	P_0	P_1	P_2	P_3	$\cdots$
V_0	$\surd$	$-$	$-$	$\surd$	$\cdots$
V_1	$\surd$	$\surd$	$-$	$\surd$	$\cdots$
V_2	$-$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\cdots$
V_3	$-$	$-$	$\surd$	$\surd$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Symbol $\surd$ resp. $-$ říká, že program uvedený v záhlaví sloupce zastaví resp. nezastaví pro vstup uvedený v záhlaví řádku. Program *Diag* „*zneguje*“ diagonálu této tabulky.

Podle našeho předpokladu (*Diag* je program a posloupnost P_i zahrnuje *všechny programy*) existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $Diag = P_j$. Zastaví *Diag* pro vstup V_j?

– *Ano*. Podle kódu *Diag* pak ale tento program vstoupí do nekonečné smyčky, tedy nezastaví.

– *Ne*. Podle kódu *Diag* pak ale `if` test neuspěje, a tento program tedy zastaví.

Předpoklad existence programu *Halt* tedy vede ke sporu. □

`Komentář:` Otázkami algoritmické (ne)řešitelnosti problémů se zabývá *teorie vyčíslitelnosti*. Metoda diagonalizace se také často využívá v *teorii složitosti* k důkazu toho, že dané dvě složitostní třídy jsou různé.

Rozšiřující studium

Látka této lekce zabrousila až do teoretických hlubin matematické logiky a teorie množin. Další studium v těchto oblastech se dá očekávat hlavně u studentů specificky zaměřených teoretickým směrem (a mířících spíše do akademické než aplikační sféry), zajímajících se o matematiku samotnou nebo o teorii vyčíslitelnosti. Proto také uvedené pokročilé poznatky Lekce 12 nebudou vyžadovány u zkoušky tohoto předmětu.

Závěrem

Gratulujeme všem, kteří se naším nelehkým učebním textem „prokousali“ až sem, a přejeme mnoho úspěchů v dalším studiu informatiky.

Konečně znovu připomínáme, že nedílnou součástí našeho studijního textu je Interaktivní osnova předmětu IB000 v IS MU a v ní přiložené online odpovědníky určené k procvičování přednesené látky.

`http://is.muni.cz/el/1433/podzim2014/IB000/index.qwarp`