Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu

Peter Šepitka

podzim 2014

Obsah

Obsah

Základné pojmy

Nech $F : M \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je daná funkcia. Rovnica

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \text{kde} \quad ' := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \tag{1}$$

sa nazýva obyčajná diferenciálna rovnica prvého rádu. Riešenie (integrál) rovnice (1) je každá funkcia $y = \varphi(x)$, ktorá má deriváciu na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ a pre $\forall x \in \mathcal{I}$ platí

$$[x, \varphi(x), \varphi'(x)] \subseteq M \qquad \text{a} \qquad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

Graf funkcie $y = \varphi(x)$, t.j., množina $\{[x, y] \subseteq \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{I},\ y = \varphi(x)\}$, sa nazýva integrálna krivka rovnice (1). V prípade, ak je možné upraviť rovnicu (1) na tvar

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

kde $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkcia, rovnica (2) sa nazýva ODR I. rádu rozriešená vzhľadom na deriváciu. Rovnica (1) sa nazýva nerozriešená vzhľadom na deriváciu.

- Začiatočná (Cauchyho) úloha (problém) – hľadáme riešenie $y = \varphi(x)$ rovnice (2), ktorého integrálna krivka prechádza pevne zvoleným bodom $[x_0, y_0] \in D$, t.j.,
$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3}$$
Riešenie úlohy (3) sa nazýva partikulárne riešenie rovnice (2).
- Všeobecné riešenie rovnice (2) – funkcia $y = \varphi(x, C)$ závislá na jednom reálnom parametre C, pomocou ktorej možno vhodnou voľbou C získať riešenie každej úlohy (3) (t.j., pre každú voľbu $[x_0, y_0] \in D$).
- Úplné (maximálne) riešenie – problém predlžovania riešení úlohy (3).
- Singulárne riešenie – porušená jednoznačnosť úlohy (3) v každom bode integrálnej krivky.

Príklad 1

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Funkcia $y = Cx$ je všeobecné riešenie uvedenej rovnice na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Každá začiatočná úloha

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(x_0) = y_0$$

totiž spĺňa $x_0 \neq 0$ a funkcia $y = C_0 x$ pre $C_0 = y_0/x_0$ je jej riešením na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Zároveň je to jediné a úplné riešenie tejto začiatočnej úlohy na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Príklad 2

$$y' = -y^2.$$

Funkcia $y = (x + C)^{-1}$ je pre každé $C \in \mathbb{R}$ jediným a úplným riešením uvedenej rovnice na intervaloch $(-\infty, -C)$ a $(-C, \infty)$, avšak nie je to všeobecné riešenie tejto rovnice, pretože nevyčerpáva napr. riešenie začiatočnej úlohy

$$y' = -y^2, \quad y(1) = 0.$$

Táto začiatočná úloha má jediné a úplné riešenie $y = 0$ na celej reálnej osi.

Príklad 3

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$$

Funkcie $y = 0$ a $y = x^3$ sú dve rôzne úplné riešenia tejto začiatočnej úlohy. Riešenie $y = 0$ je zároveň singulárnym riešením danej rovnice.

Veta 1 (Existencia a jednoznačnosť riešení)

Nech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *je oblasť a* $[x_0, y_0] \in D$ *je daný bod. Uvažujme začiatočnú úlohu*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{4}$$

kde funkcia f *je definovaná na* D*. Platí:*

1. *Ak* f *je spojitá na* D*, potom existuje interval* $\mathcal{I}$ *a funkcia* φ *tak, že* $y = \varphi(x)$ *je riešenie úlohy* (4) *na* $\mathcal{I}$*.*
2. *Ak naviac i* $\partial f / \partial y$ *je spojitá na* D*, potom pre každé riešenie* $y = \psi(x)$ *úlohy* (4) *definované na intervale* $\mathcal{J}$ *platí*

$$\psi(x) = \varphi(x) \quad \text{pre } \forall x \in \mathcal{J} \cap \mathcal{I}.$$

Niektoré špeciálne typy ODR I. rádu

- ODR so separovateľnými premennými

$$y' = g(x)\, h(y). \tag{5}$$

- Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu

$$y' = p(x)\, y + q(x). \tag{6}$$

- Bernoulliho diferenciálna rovnica

$$y' = p(x)\, y + q(x)\, y^k, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \tag{7}$$

- Exaktná diferenciálna rovnica

$$M(x, y)\, \mathrm{d}x + N(x, y)\, \mathrm{d}y = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{8}$$

Obsah

Definícia a základné pojmy

Nech $n \in \mathbb{N}$. Súbor rovníc

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n + b_1(t),\\
x_2' &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \cdots + a_{2n}(t)\,x_n + b_2(t),\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n + b_n(t),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

kde a_{ij} a b_i, $i,j = 1,\cdots,n$ sú reálne funkcie definované a spojité na reálnom intervale $\mathcal{I}$ (pripúšťame aj $\mathcal{I} = (-\infty,\infty)$) a znak $'$ znamená $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, sa nazýva systém lineárnych diferenciálnych rovníc I. rádu. Ak $b_i \equiv 0$ na $\mathcal{I}$ pre každé $i = 1,\cdots,n$, systém (9) sa nazýva homogénny. V opačnom prípade, t.j., $b_i \not\equiv 0$ pre aspoň jedno $i = 1,\cdots,n$, hovoríme o nehomogénnom systéme.

Zavedením označenia

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

môžeme systém (9) prepísať do tzv. vektorového tvaru

$$x' = A(t)\,x + b(t). \tag{11}$$

Zobrazenia $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto b(t)$ a $t \mapsto x(t)$ sa nazývajú maticová (rádu n) a vektorové (n-vektorové) funkcie na intervale $\mathcal{I}$. Platia pre ne všetky známe vlastnosti matíc a vektorov. Limity, spojitosť, derivovanie a integrovanie sa realizujú vždy po jednotlivých maticových prvkoch, resp. vektorových zložkách.

Systém (11) sa nazýva homogénny, ak $b(t) \equiv 0$ na $\mathcal{I}$. V opačnom prípade je systém (11) nehomogénny a rovnica

$$x' = A(t)\,x$$

sa nazýva pridružený homogénny systém k nehomogénnemu systému (11).

Riešením systému (11) rozumieme každú n-vektorovú funkciu

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))^T$$

definovanú a diferencovateľnú na $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, ktorá spĺňa rovnicu (11) na $\mathcal{J}$, t.j.,

$$\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + b(t), \quad \forall t \in \mathcal{J}.$$

Začiatočná (Cauchyho) úloha

$$x' = A(t)\,x + b(t), \quad x(t_0) = \eta, \tag{12}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$ je pevný bod a $\eta \in \mathbb{R}^n$ je pevný vektor. Riešenie úlohy (12) sa nazýva aj partikulárne riešenie.

Existencia a jednoznačnosť riešení

Lema 1

Nech maticová funkcia A a vektorová funkcia b sú definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$. Potom funkcia φ je riešenie začiatočnej úlohy (12) na celom $\mathcal{I}$ práve vtedy keď

$$\varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s \quad \textit{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{13}$$

Poznámka 1

Lema 1 vyjadruje ekvivalenciu medzi úlohou (12) a integrálnou rovnicou (13). Stačí sa preto obmedziť na vyšetrovanie rovnice (13).

Dôkaz Lemy 1.

Nech $t \in \mathcal{I}$. Ak φ je riešenie úlohy (12), t.j. platí

$$\varphi'(s) = A(s)\,\varphi(s) + b(s) \quad \text{na } \mathcal{I}, \tag{14}$$

potom integráciou oboch strán rovnice (14) od t_0 po t a využitím začiatočnej podmienky $\varphi(t_0) = \eta$ získame integrálnu rovnicu (13), nakoľko

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,\mathrm{d}s &= \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s, \\
\varphi(t) - \varphi(t_0) &= \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s, \\
\varphi(t) &= \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Naopak, nech φ je riešenie rovnice (13). Potom $\varphi(t_0) = \eta$ a funkcia φ je diferencovateľná na $\mathcal{I}$. Derivovaním oboch strán rovnice (13) podľa t dostaneme $\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + b(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. ∎

Veta 2 (Existencia a globálna jednoznačnosť riešení)

Nech maticová funkcia A a vektorová funkcia b sú definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$. Potom úloha (12), t.j., začiatočná úloha

$$x' = A(t)\,x + b(t), \quad x(t_0) = \eta$$

má pre každé $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$ práve jedno úplné riešenie, t.j., riešenie, ktoré existuje na celom $\mathcal{I}$. Toto riešenie možno vyjadriť ako limitu tzv. Picardovej postupnosti postupných aproximácií $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde pre každé $t \in \mathcal{I}$ platí

$$\varphi_0(t) \equiv 0, \quad \varphi_{k+1}(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi_k(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{15}$$

Poznámka 2

Tvrdenie Vety 2 zostane v platnosti, ak za začiatočnú Picardovu aproximáciu φ_0 zoberieme ľubovoľnú funkciu definovanú a spojitú na $\mathcal{I}$. Limitná funkcia postupnosti $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ nezávisí na výbere funkcie φ_0.

Dôkaz Vety 2 (náčrt).

1. **Existencia**
   Funkcie φ_k sú definované na celom $\mathcal{I}$ pre každé $k \in \mathbb{N}_0$. Ukážeme, že postupnosť $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje lokálne rovnomerne (skoro rovnomerne) na intervale $\mathcal{I}$. To zaručuje existenciu funkcie φ, ktorá je definovaná na celom $\mathcal{I}$ a spĺňa

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \varphi(t) \tag{16}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi_k(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s \tag{17}$$

   pre každé $t \in \mathcal{I}$. Z rovností (16) a (17) vyplýva, že φ rieši integrálnu rovnicu (13) na celom $\mathcal{I}$. Podľa Lemy 1 je potom funkcia φ riešením začiatočnej úlohy (12) na celom $\mathcal{I}$.

2. **Jednoznačnosť**
   Jednoznačnosť riešenia začiatočnej úlohy (12) na intervale $\mathcal{I}$ vyplýva z Gronwallovej lemy.

∎

Príklad 4

Začiatočná úloha

$$x_1' = -\frac{x_2}{t} + 9t, \quad x_2' = -\frac{x_1}{t} - 3t, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 2$$

má na intervale $(0, \infty)$ jediné úplné riešenie, pretože funkcie

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 9t \\ -3t \end{pmatrix}$$

sú definované a spojité na celom intervale $(0, \infty)$ a bod $t_0 = 1 \in (0, \infty)$. Dá sa ukázať, že hľadaným riešením je dvojica

$$x_1(t) = 7t^2 - \frac{13}{2}t + \frac{1}{2t}, \quad x_2(t) = -5t^2 + \frac{13}{2}t + \frac{1}{2t}, \quad t \in (0, \infty).$$

Poznámka 3

Picardova metóda postupných aproximácií umožňuje podľa Vety 2 hľadať riešenie φ začiatočnej úlohy (12) ako limitu postupnosti $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$. Ak zavedieme funkcie Δ_k pre $k \in \mathbb{N}_0$ predpisom

$$\Delta_k(t) := \varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

potom je možné riešenie φ vyjadriť v tvare nekonečného radu

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{18}$$

Nekonečný funkcionálny rad (18) konverguje lokálne rovnomerne na intervale $\mathcal{I}$. Podľa Vety 2 funkcie Δ_k spĺňajú pre každé $t \in \mathcal{I}$

$$\Delta_0(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{d}s, \quad \Delta_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,\Delta_k(s)\,\mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{19}$$

Príklad 5

Uvažujme homogénnu začiatočnú úlohu

$$x' = Ax, \quad x(0) = (0,1)^T$$

na intervale $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$, kde A je reálna konštantná matica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa Poznámky 3 s $b(t) \equiv 0$ na $\mathcal{I}$, $t_0 = 0$ a $\eta = (0,1)^T$ pre funkcie Δ_k platí

$$\Delta_0(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{k+1}(t) = A \int_0^t \Delta_k(s)\,\mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Pomocou matematickej indukcie vzhľadom na index k možno ukázať

$$\Delta_k(t) = \frac{t^k}{k!} A^k \eta, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Príklad 5

Postupnosť matíc $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ je periodická s najmenšou periódou 4, nakoľko

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A.$$

Preto pre každé $l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$A^{4l} = I, \quad A^{4l+1} = A, \quad A^{4l+2} = -I, \quad A^{4l+3} = -A.$$

Riešenie φ začiatočnej úlohy potom bude mať podľa (18) pre každé $t \in \mathcal{I}$ tvar

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} \right) \eta + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} \right) A\eta \\ &= (\cos t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\sin t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obsah

Homogénny systém

Nech $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc

$$y' = A(t)\,y, \tag{20}$$

kde A je maticová funkcia rádu n definovaná a spojitá na intervale $\mathcal{I}$. Ak y_1 a y_2 sú dve (úplné) riešenia systému (20) a c_1, c_2 sú ľubovoľné reálne konštanty, potom aj funkcia $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ je (úplným) riešením rovnice (20), nakoľko

$$y' = (c_1 y_1 + c_2 y_2)' = c_1 y_1' + c_2 y_2' = c_1 A y_1 + c_2 A y_2 = A(c_1 y_1 + c_2 y_2) = Ay$$

na celom intervale $\mathcal{I}$. Táto vlastnosť je kľúčová pri skúmaní štruktúry množiny všetkých riešení systému (20).

Veta 3 (Štruktúra množiny riešení)

Množina všetkých riešení rovnice (20) *na intervale* $\mathcal{I}$ *tvorí lineárny (vektorový) priestor nad telesom reálnych čísiel.*

Lineárna závislosť a nezávislosť funkcií I

Definícia 1

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech $y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_k$ sú funkcie definované na nedegenerovanom intervale $\mathcal{I}$. Povieme, že funkcie $y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_k$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$, ak existuje nenulová k-tica reálnych konštánt $(c_1,\, c_2,\, \dots,\, c_k)$ tak, že platí

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_k y_k(t) = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

V opačnom prípade sa funkcie $y_1,\, y_2,\, \dots,\, y_k$ nazývajú lineárne nezávislé na $\mathcal{I}$.

Príklad 6

Ukážeme, že $2-$vektoré funkcie

$$y_1(t) = (t, t)^T, \quad y_2(t) = (t^2, t)^T, \quad y_3(t) = (t^3, t)^T$$

sú lineárne nezávislé na každom nedegenerovanom reálnom intervale. Nech $\mathcal{I}$ je takýto interval a nech $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ spĺňajú $c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \equiv 0$ na $\mathcal{I}$, t.j.,

Lineárna závislosť a nezávislosť funkcií II

Príklad 6

$$c_1 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

Trojnásobným derivovaním poslednej rovnosti podľa premennej t dostaneme

$$c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies c_3 = 0.$$

Podobne, dvojnásobné derivovanie uvedenej rovnosti spolu s $c_3 = 0$ implikuje

$$c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies c_2 = 0.$$

Teda $c_1(t,t)^T = 0$ na $\mathcal{I}$, z čoho máme i $c_1 = 0$. Preto sú funkcie y_1, y_2 a y_3 lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$.

Lineárna závislosť a nezávislosť riešení

V prípade riešení systému (20) sa vyšetrovanie lineárnej závislosti, resp. nezávislosti prevádza na problém lineárnej závislosti, resp. nezávislosti n-rozmerných reálnych vektorov.

Veta 4 (Lineárna závislosť riešení)

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú úplné riešenia systému (20). Potom funkcie $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď aspoň pre jedno $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$ lineárne závislé.

Dôkaz.

Implikácia $\Rightarrow$ platí triviálne podľa Definície 1. Naopak, nech pre $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_k(t_0)$ lineárne závislé. Teda existuje nenulová k-tica $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ tak, že $c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_k y_k(t_0) = 0$. Funkcia $y := c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k$ je riešením rovnice (20) a $y(t_0) = 0$. Z jednoznačnosti riešení podľa Vety 2 máme $y(t) \equiv 0$ na celom $\mathcal{I}$, čo následne znamená, že funkcie $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$. ■

Dôsledok 1 (Dimenzia priestoru riešení)

Množina riešení rovnice (20) na intervale $\mathcal{I}$ tvorí lineárny priestor dimenzie n.

Dôkaz.

Z Vety 4 vieme, že dimenzia priestoru riešení je najviac n, pretože priestor $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionálny. Na druhej strane, táto dimenzia je aspoň n. Vyplýva to z nasledujúcej úvahy. Nech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je kanonická báza priestoru $\mathbb{R}^n$ a nech $t_0 \in \mathcal{I}$. Podľa Vety 2 existujú úplné riešenia $y_1, y_2, \ldots, y_n$ systému (20) s

$$y_i(t_0) = e_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Nakoľko vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_n(t_0)$ sú lineárne nezávislé, podľa Vety 4 riešenia $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sú lineárne nezávislé na $\mathcal{I}$. ■