Komplexná analýza

Peter Šepitka

podzim 2014

Obsah

Obsah

Obor komplexných čísiel

Pod pojmom komplexné číslo a rozumieme usporiadanú dvojicu $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Prvá zložka α tejto dvojice sa nazýva reálna časť komplexného čísla a, druhá zložka β sa nazýva imaginárna časť komplexného čísla a, označujeme $\alpha = \operatorname{Re} a$ a $\beta = \operatorname{Im} a$. Definujeme sčítanie a násobenie komplexných čísiel

$$(\alpha,\, \beta) + (\gamma,\, \delta) := (\alpha + \gamma,\, \beta + \delta),$$
$$(\alpha,\, \beta) \cdot (\gamma,\, \delta) := (\alpha\gamma - \beta\delta,\, \alpha\delta + \beta\gamma).$$

Sčítanie i násobenie komplexných čísiel sú asociatívne a komutatívne binárne operácie a pre každú trojicu a, b, c komplexných čísiel platí distributívny zákon

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Pre úplnosť definujeme násobenie komplexného čísla reálnym číslom

$$r(\alpha,\, \beta) := (r\alpha,\, r\beta), \quad r \in \mathbb{R}.$$

- Nula – $(0, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie, t.j.,

$$(\alpha,\, \beta) + (0, 0) = (0, 0) + (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, \beta).$$

- Jednotka – $(1, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na násobenie, t.j.,

$$(\alpha,\, \beta) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, \beta).$$

- Opačné číslo ku komplexnému číslu $a = (\alpha,\, \beta)$

$$-a := (-\alpha,\, -\beta)$$

Komplexné číslo $-a$ je jediné riešenie rovnice

$$a + z = (0, 0).$$

- Inverzné číslo k nenulovému komplexnému číslu $a = (\alpha, \beta)$

$$a^{-1} := \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},\, \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right).$$

Komplexné číslo a^{-1} je jediné riešenie rovnice

$$a \cdot z = (1, 0).$$

- Odčítanie komplexných čísiel a, b definujeme $a - b := a + (-b)$.
- Delenie komplexných čísiel $a, b,\ b \neq (0, 0)$, definujeme $a/b := a \cdot b^{-1}$.

Množina všetkých komplexných čísiel sa označuje $\mathbb{C}$. Algebraická štruktúra $(\mathbb{C},\, +,\, \cdot)$ je teleso, ktoré sa nedá usporiadať (na rozdiel od $(\mathbb{R},\, +,\, \cdot)$).

Algebraický tvar komplexného čísla

Podmnožina komplexných čísiel

$$\mathcal{R} := \{a \in \mathbb{C},\ a = (\alpha,\, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

je podtelesom telesa $\mathbb{C}$ izomorfným s telesom $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísiel. Preto je možné množiny $\mathcal{R}$ a $\mathbb{R}$, ako algebraické štruktúry, stotožniť. To znamená, že v množine $\mathbb{C}$ budeme klásť $\alpha = (\alpha,\, 0)$ pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $0 = (0, 0)$ a $1 = (1, 0)$. Ďalej, komplexné číslo $(0, 1)$ sa označuje symbolom i, t.j., $\mathrm{i} = (0, 1)$, a nazýva sa imaginárna jednotka. Platí $\mathrm{i}^2 = (-1, 0) = -1$. Tieto označenia potom umožňujú vyjadriť komplexné číslo $a = (\alpha, \beta)$ v tzv. algebraickom tvare

$$a = (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, 0) + (0,\, \beta) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = \alpha + \mathrm{i}\beta. \tag{1}$$

Komplexné číslo $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ s $\beta = 0$ (teda s $\operatorname{Im} a = 0$) sa označuje ako reálne (komplexné) číslo, kým komplexné číslo $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ s $\beta \neq 0$ (teda s $\operatorname{Im} a \neq 0$) sa nazýva imaginárne (komplexné) číslo. Imaginárne číslo s nulovou reálnou časťou sa nazýva rýdzo imaginárne (komplexné) číslo. Komplexne združené číslo $\bar{a}$ k číslu $a = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$ je definované ako $\bar{a} = \alpha - \mathrm{i}\beta$.

Absolútna hodnota (veľkosť) $|a|$ komplexného čísla $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ sa definuje

$$|a| := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{2}$$

Reálne číslo $|a|$ vyjadruje geometrickú vzdialenosť bodu $[\alpha, \beta]$ od bodu $[0, 0]$ v reálnej rovine. Všeobecne, pre $a, b \in \mathbb{C}$ reálne číslo $|a - b|$ vyjadruje vzájomnú vzdialenosť bodov $[\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Im}\, a]$ a $[\mathrm{Re}\, b, \mathrm{Im}\, b]$ v reálnej rovine.

Poznámka 1 (Základné vlastnosti)

Nech $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Potom platí:

- $\bar{\bar{a}} = a, \quad \overline{a_1 \pm a_2} = \bar{a}_1 \pm \bar{a}_2, \quad \overline{a_1 a_2} = \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad \overline{a_1/a_2} = \bar{a}_1/\bar{a}_2$, ak $a_2 \neq 0$.
- $a\bar{a} = |a|^2, \quad |a_1 a_2| = |a_1||a_2|, \quad |a_1/a_2| = |a_1|/|a_2|$, ak $a_2 \neq 0$.
- trojuholníkové nerovnosti $||a_1| - |a_2|| \leq |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$.
- $|\mathrm{Re}\, a| \leq |a|, \quad |\mathrm{Im}\, a| \leq |a|$.
- $$\mathrm{Re}\, a = \frac{a + \bar{a}}{2}, \quad \mathrm{Im}\, a = \frac{a - \bar{a}}{2\mathrm{i}}.$$
- $\mathrm{Re}\,(a_1 \pm a_2) = \mathrm{Re}\, a_1 \pm \mathrm{Re}\, a_2, \quad \mathrm{Im}\,(a_1 \pm a_2) = \mathrm{Im}\, a_1 \pm \mathrm{Im}\, a_2$.

Komplexná (Gaussova) rovina

Prirodzeným modelom množiny $\mathbb{C}$ komplexných čísiel je (euklidovská) rovina – komplexná (Gaussova) rovina. Každému komplexnému číslu $z = x + \mathrm{i}y$ je priradený bod v rovine so súradnicami $[x, y]$. Naopak, každému bodu $[x, y]$ roviny odpovedá práve jedno komplexné číslo $z = x + \mathrm{i}y$. Ďalej budeme preto pre jednoduchosť stotožňovať body roviny s komplexnými číslami. Vzdialenosť (metrika) sa v množine $\mathbb{C}$ definuje pomocou absolútnej hodnoty komplexného čísla zavedenej v (2), t.j., vzdialenosť dvoch komplexných čísiel z_1 a z_2 je definovaná $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$.
Ako je to s pojmom “komplexné” nekonečno? Pre množinu $\mathbb{C}$ komplexných čísiel sa definuje iba jedno “nekonečno”. Konkrétne, k množine $\mathbb{C}$ sa formálne pridá jeden prvok, ktorý sa označuje symbolom ∞, spĺňajúci vlastnosti

$$\infty = -\infty = |\infty|, \quad \infty \cdot \infty = \infty,$$
$$z + \infty = \infty, \quad z/\infty = 0, \quad \infty/z = \infty \quad \text{pre } z \in \mathbb{C},$$
$$z \cdot \infty = \infty, \quad z/0 = \infty, \quad \text{pre } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Nedefinujú sa výrazy $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞. Množina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sa spolu s danými algebraickými operáciami označuje $\tilde{\mathbb{C}}$ a nazýva sa rozšírená (uzavretá) komplexná rovina alebo tiež rozšírená (uzavretá) Gaussova rovina.

Goniometrický (polárny) tvar komplexného čísla

S modelom komplexnej roviny úzko súvisí tzv. goniometrický (polárny) tvar komplexných čísiel. Každé nenulové komplexné číslo z je možné vyjadriť v tvare

$$z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \tag{3}$$

kde φ je argument komplexného čísla z definovaný rovnicami

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{4}$$

Argument φ nie je určený jednoznačne (ak φ je argument z, potom i $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je argument z). Množina všetkých argumentov daného komplexného čísla sa označuje $\operatorname{Arg} z$ (je to tzv. mnohoznačná funkcia premennej z). Symbol $\arg z$ bude označovať základný (hlavný) argument komplexného čísla z, t.j., argument spĺňajúci $-\pi \leq \arg z < \pi$. Základný argument $\arg z$ je pre dané z určený jednoznačne. Platí

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \tag{5}$$

Posledná rovnosť sa často zapisuje i v tvare $\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}$.

Zavedenie goniometrického tvaru v (3) umožňuje efektívne násobiť a deliť komplexné čísla. Konkrétne, ak

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1), \qquad z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

sú dve komplexné čísla a φ_1 a φ_2 sú ich ľubovoľné argumenty, potom platí

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2|\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &\qquad\qquad + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= |z_1||z_2|\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Z rovnosti (6) potom vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \quad \text{a} \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \tag{7}$$

ako aj tzv. Moivreov vzorec na výpočet n-tej mocniny komplexného čísla z

$$z^n = |z|^n\,[\cos(n\arg z) + \mathrm{i}\sin(n\arg z)], \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Okrem toho z relácií (7) vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z \quad \text{a} \quad \arg(z^n) \equiv n\arg z \pmod{2\pi}. \tag{9}$$

Podobne, pre podiel z_1/z_2, $z_2 \neq 0$, platí

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2}\,\frac{\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2}\\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}\\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Potom máme

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}. \tag{11}$$

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ je n-tá odmocnina zo z definovaná ako

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{12}$$

kde $k = 0, \ldots, n-1$. Pre pevné n sa teda jedná o mnohoznačnú funkciu (premennej z), pričom pre každé $z \in \mathbb{C}$ existuje práve n jeho n-tých odmocnín.

Výraz $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, sa obvykle označuje symbolom $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, t.j.,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi. \tag{13}$$

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ potom platí

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z. \tag{14}$$

Zápis (14) sa nazýva exponenciálny tvar komplexného čísla z. Pre každé φ, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}| = 1, \quad \arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \equiv \varphi \pmod{2\pi}, \quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 1/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{15}$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}, \tag{16}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \tag{17}$$

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Neskôr ukážeme, že výraz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ zavedený v (13) je rozšírením exponenciálnej funkcie e^x do oboru komplexných čísiel.

Príklad 1

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$1 + \mathrm{i}.$$

Pre komplexné číslo $z = 1 + \mathrm{i}$ platí

$$\operatorname{Re} z = 1, \quad \operatorname{Im} z = 1, \quad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z potom spĺňa rovnosti

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} z/|z| = 1/\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} z/|z| = 1/\sqrt{2}.$$

Riešenie tejto sústavy je napr. $\varphi = 9\pi/4$. Potom platí

$$z = \sqrt{2}\,[\cos(9\pi/4) + \mathrm{i}\sin(9\pi/4)].$$

Základný argument čísla z je $\arg z = \pi/4$ a podobne platí

$$z = \sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)].$$

Príklad 2

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$-2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}.$$

Pre komplexné číslo $z = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ platí

$$\operatorname{Re} z = -2\sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z = -2, \quad |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z spĺňa rovnosti

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} z/|z| = -\sqrt{3}/2, \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} z/|z| = -1/2.$$

Základný argument čísla z je $\arg z = -5\pi/6$ a platí

$$z = 4\left[\cos\left(-5\pi/6\right) + \mathrm{i}\sin\left(-5\pi/6\right)\right].$$

Príklad 3

Vypočítajte
$$(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{15}.$$
Použijeme Moivreov vzorec (8). Komplexné číslo $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ prepíšeme do goniometrického tvaru. Platí $|z| = 2$, $\arg z = \pi/3$, a teda
$$z = 2\,[\cos{(\pi/3)} + \mathrm{i}\sin{(\pi/3)}].$$
Potom podľa (8) máme
$$z^{15} = 2^{15}\,[\cos{(15\pi/3)} + \mathrm{i}\sin{(15\pi/3)}] = 2^{15}\,[\cos{(5\pi)} + \mathrm{i}\sin{(5\pi)}] = -2^{15}.$$
Poznamenajme, že rovnaký výsledok by sme získali klasickým roznásobením podľa binomickej vety.

Príklad 4

Vypočítajme v $\mathbb{C}$

$$\sqrt[3]{-8}.$$

Podľa (12) existujú práve 3 komplexné tretie odmocniny z čísla $z=-8$. Goniometrický tvar čísla z je

$$z = 8\,[\cos(-\pi) + \mathrm{i}\sin(-\pi)].$$

Podľa (12) platí

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{-\pi+2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi+2k\pi}{3}\right)\right],$$

pričom $k = 0, 1, 2$. Postupne dostávame

$$\begin{aligned}
k = 0 &\longrightarrow \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right] = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\\
k = 1 &\longrightarrow \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\\
k = 2 &\longrightarrow \sqrt[3]{8}\,(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -2.
\end{aligned}$$