

# Komplexná analýza

Peter Šepitka

podzim 2014

# Obsah

- 1 Komplexné čísla
- 2 Postupnosti, rady a funkcie
- 3 Komplexná derivácia a holomorfné funkcie
- 4 Elementárne funkcie
- 5 Komplexný integrál a Cauchyho teória
- 6 Laurentov rad a teória rezíduí

# Obsah

- 1 Komplexné čísla**
- 2 Postupnosti, rady a funkcie
- 3 Komplexná derivácia a holomorfné funkcie
- 4 Elementárne funkcie
- 5 Komplexný integrál a Cauchyho teória
- 6 Laurentov rad a teória rezíduí

# Obor komplexných čísiel

Pod pojmom **komplexné číslo**  $a$  rozumieme usporiadanú dvojicu  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Prvá zložka  $\alpha$  tejto dvojice sa nazýva **reálna časť** komplexného čísla  $a$ , druhá zložka  $\beta$  sa nazýva **imaginárna časť** komplexného čísla  $a$ , označujeme  $\alpha = \operatorname{Re} a$  a  $\beta = \operatorname{Im} a$ . Definujeme **sčítanie** a **násobenie** komplexných čísiel

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) := (\alpha + \gamma, \beta + \delta),$$

$$(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) := (\alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma).$$

Sčítanie i násobenie komplexných čísiel sú **asociatívne** a **komutatívne** binárne operácie a pre každú trojicu  $a, b, c$  komplexných čísiel platí **distributívny zákon**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Pre úplnosť definujeme **násobenie komplexného čísla reálnym číslom**

$$r(\alpha, \beta) := (r\alpha, r\beta), \quad r \in \mathbb{R}.$$

- **Nula** –  $(0, 0)$  – neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie, t.j.,

$$(\alpha, \beta) + (0, 0) = (0, 0) + (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta).$$

- **Jednotka** –  $(1, 0)$  – neutrálny prvok vzhľadom na násobenie, t.j.,

$$(\alpha, \beta) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta).$$

- **Opačné číslo** ku komplexnému číslu  $a = (\alpha, \beta)$

$$-a := (-\alpha, -\beta)$$

Komplexné číslo  $-a$  je jediné riešenie rovnice

$$a + z = (0, 0).$$

- **Inverzné číslo** k nenulovému komplexnému číslu  $a = (\alpha, \beta)$

$$a^{-1} := \left( \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right).$$

Komplexné číslo  $a^{-1}$  je jediné riešenie rovnice

$$a \cdot z = (1, 0).$$

- **Odčítanie** komplexných čísiel  $a, b$  definujeme  $a - b := a + (-b)$ .
- **Delenie** komplexných čísiel  $a, b, b \neq (0, 0)$ , definujeme  $a/b := a \cdot b^{-1}$ .

Množina všetkých komplexných čísiel sa označuje  $\mathbb{C}$ . Algebraická štruktúra  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  je teleso, ktoré sa nedá usporiadať (na rozdiel od  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ).

# Algebraický tvar komplexného čísla

Podmnožina komplexných čísiel

$$\mathcal{R} := \{a \in \mathbb{C}, a = (\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

je podtelesom telesa  $\mathbb{C}$  izomorfným s telesom  $\mathbb{R}$  všetkých reálnych čísiel. Preto je možné množiny  $\mathcal{R}$  a  $\mathbb{R}$ , ako algebraické štruktúry, stotožniť. To znamená, že v množine  $\mathbb{C}$  budeme klásť  $\alpha = (\alpha, 0)$  pre každé  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Potom  $0 = (0, 0)$  a  $1 = (1, 0)$ . Ďalej, komplexné číslo  $(0, 1)$  sa označuje symbolom **i**, t.j.,  $i = (0, 1)$ , a nazýva sa **imaginárna jednotka**. Platí  $i^2 = (-1, 0) = -1$ . Tieto označenia potom umožňujú vyjadriť komplexné číslo  $a = (\alpha, \beta)$  v tzv. **algebraickom tvare**

$$a = (\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = \alpha + i\beta. \quad (1)$$

Komplexné číslo  $a = \alpha + i\beta$  s  $\beta = 0$  (teda s  $\text{Im } a = 0$ ) sa označuje ako **reálne** (komplexné) číslo, kým komplexné číslo  $a = \alpha + i\beta$  s  $\beta \neq 0$  (teda s  $\text{Im } a \neq 0$ ) sa nazýva **imaginárne** (komplexné) číslo. Imaginárne číslo s nulovou reálnou časťou sa nazýva **rýdzo imaginárne** (komplexné) číslo. **Komplexne združené číslo**  $\bar{a}$  k číslu  $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  je definované ako  $\bar{a} = \alpha - i\beta$ .

**Absolútna hodnota (veľkosť)  $|a|$**  komplexného čísla  $a = \alpha + i\beta$  sa definuje

$$|a| := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (2)$$

Reálne číslo  $|a|$  vyjadruje geometrickú vzdialenosť bodu  $[\alpha, \beta]$  od bodu  $[0, 0]$  v reálnej rovine. Všeobecne, pre  $a, b \in \mathbb{C}$  reálne číslo  $|a - b|$  vyjadruje vzájomnú vzdialenosť bodov  $[\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a]$  a  $[\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b]$  v reálnej rovine.

### Poznámka 1 (Základné vlastnosti)

Nech  $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ . Potom platí:

- $\bar{\bar{a}} = a$ ,  $\overline{a_1 \pm a_2} = \bar{a}_1 \pm \bar{a}_2$ ,  $\overline{a_1 a_2} = \bar{a}_1 \bar{a}_2$ ,  $\overline{a_1/a_2} = \bar{a}_1/\bar{a}_2$ , ak  $a_2 \neq 0$ .
- $a\bar{a} = |a|^2$ ,  $|a_1 a_2| = |a_1||a_2|$ ,  $|a_1/a_2| = |a_1|/|a_2|$ , ak  $a_2 \neq 0$ .
- trojuholníkové nerovnosti  $||a_1| - |a_2|| \leq |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$ .
- $|\operatorname{Re} a| \leq |a|$ ,  $|\operatorname{Im} a| \leq |a|$ .

•

$$\operatorname{Re} a = \frac{a + \bar{a}}{2}, \quad \operatorname{Im} a = \frac{a - \bar{a}}{2i}.$$

- $\operatorname{Re}(a_1 \pm a_2) = \operatorname{Re} a_1 \pm \operatorname{Re} a_2$ ,  $\operatorname{Im}(a_1 \pm a_2) = \operatorname{Im} a_1 \pm \operatorname{Im} a_2$ .

# Komplexná (Gaussova) rovina

Prirodzeným modelom množiny  $\mathbb{C}$  komplexných čísel je (euklidovská) rovina – **komplexná (Gaussova) rovina**. Každému komplexnému číslu  $z = x + iy$  je priradený bod v rovine so súradnicami  $[x, y]$ . Naopak, každému bodu  $[x, y]$  roviny odpovedá práve jedno komplexné číslo  $z = x + iy$ . Ďalej budeme preto pre jednoduchosť stotožňovať body roviny s komplexnými číslami. Vzdialenosť (metrika) sa v množine  $\mathbb{C}$  definuje pomocou absolútnej hodnoty komplexného čísla zavedenej v (2), t.j., vzdialenosť dvoch komplexných čísel  $z_1$  a  $z_2$  je definovaná  $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ .

Ako je to s pojmom **“komplexné” nekonečno**? Pre množinu  $\mathbb{C}$  komplexných čísel sa definuje iba jedno “nekonečno”. Konkrétne, k množine  $\mathbb{C}$  sa formálne pridá jeden prvok, ktorý sa označuje symbolom  $\infty$ , spĺňajúci vlastnosti

$$\begin{aligned} \infty &= -\infty = |\infty|, & \infty \cdot \infty &= \infty, \\ z + \infty &= \infty, & z/\infty &= 0, & \infty/z &= \infty & \text{pre } z \in \mathbb{C}, \\ z \cdot \infty &= \infty, & z/0 &= \infty, & & \text{pre } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Nedefinujú sa výrazy  $\infty + \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ . Množina  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  sa spolu s danými algebraickými operáciami označuje  $\tilde{\mathbb{C}}$  a nazýva sa **rozšírená (uzavretá) komplexná rovina** alebo tiež **rozšírená (uzavretá) Gaussova rovina**.



# Goniometrický (polárny) tvar komplexného čísla

S modelom komplexnej roviny úzko súvisí tzv. **goniometrický (polárny) tvar komplexných čísiel**. Každé nenulové komplexné číslo  $z$  je možné vyjadriť v tvare

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (3)$$

kde  $\varphi$  je **argument** komplexného čísla  $z$  definovaný rovnicami

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \quad (4)$$

Argument  $\varphi$  nie je určený jednoznačne (ak  $\varphi$  je argument  $z$ , potom i  $\varphi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , je argument  $z$ ). Množina všetkých argumentov daného komplexného čísla sa označuje  **$\operatorname{Arg} z$**  (je to tzv. **mnohoznačná funkcia** premennej  $z$ ). Symbol  $\arg z$  bude označovať **základný (hlavný) argument** komplexného čísla  $z$ , t.j., argument spĺňajúci  $-\pi \leq \arg z < \pi$ . Základný argument  $\arg z$  je pre dané  $z$  určený jednoznačne. Platí

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \quad (5)$$

Posledná rovnosť sa často zapisuje i v tvare  $\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}$ .

Zavedenie goniometrického tvaru v (3) umožňuje efektívne násobiť a deliť komplexné čísla. Konkrétne, ak

$$z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

sú dve komplexné čísla a  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  sú ich ľubovoľné argumenty, potom platí

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| |z_2| [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &\quad + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Z rovnosti (6) potom vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \quad \text{a} \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \quad (7)$$

ako aj tzv. **Moivreov vzorec** na výpočet  $n$ -tej mocniny komplexného čísla  $z$

$$z^n = |z|^n [\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Okrem toho z relácií (7) vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z \quad \text{a} \quad \arg(z^n) \equiv n \arg z \pmod{2\pi}. \quad (9)$$

Podobne, pre podiel  $z_1/z_2$ ,  $z_2 \neq 0$ , platí

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} \frac{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2}{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Potom máme

$$\operatorname{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad \arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}. \quad (11)$$

Pre každé  $z \in \mathbb{C}$  a  $n \in \mathbb{N}$  je  **$n$ -tá odmocnina** zo  $z$  definovaná ako

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (12)$$

kde  $k = 0, \dots, n-1$ . Pre pevné  $n$  sa teda jedná o mnohoznačnú funkciu (premennej  $z$ ), pričom pre každé  $z \in \mathbb{C}$  existuje práve  $n$  jeho  $n$ -tých odmocnín.

Výraz  $\cos \varphi + i \sin \varphi$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , sa obvykle označuje symbolom  $e^{i\varphi}$ , t.j.,

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (13)$$

Pre každé  $z \in \mathbb{C}$  potom platí

$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \text{Arg } z. \quad (14)$$

Zápis (14) sa nazýva **exponenciálny tvar** komplexného čísla  $z$ . Pre každé  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2 \in \mathbb{R}$  platí

$$|e^{i\varphi}| = 1, \quad \arg e^{i\varphi} \equiv \varphi \pmod{2\pi}, \quad \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = 1/e^{i\varphi}, \quad (15)$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad (16)$$

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}, \quad e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} / e^{i\varphi_2}, \quad (17)$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^m = e^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Neskôr ukážeme, že výraz  $e^{i\varphi}$  zavedený v (13) je rozšírením exponenciálnej funkcie  $e^x$  do oboru komplexných čísiel.

## Príklad 1

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$1 + i.$$

Pre komplexné číslo  $z = 1 + i$  platí

$$\operatorname{Re} z = 1, \quad \operatorname{Im} z = 1, \quad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ľubovoľný argument  $\varphi$  čísla  $z$  potom spĺňa rovnosti

$$\cos \varphi = \operatorname{Re} z / |z| = 1/\sqrt{2}, \quad \sin \varphi = \operatorname{Im} z / |z| = 1/\sqrt{2}.$$

Riešenie tejto sústavy je napr.  $\varphi = 9\pi/4$ . Potom platí

$$z = \sqrt{2} [\cos (9\pi/4) + i \sin (9\pi/4)].$$

Základný argument čísla  $z$  je  $\arg z = \pi/4$  a podobne platí

$$z = \sqrt{2} [\cos (\pi/4) + i \sin (\pi/4)].$$

## Príklad 2

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$-2\sqrt{3} - 2i.$$

Pre komplexné číslo  $z = -2\sqrt{3} - 2i$  platí

$$\operatorname{Re} z = -2\sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z = -2, \quad |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4.$$

Ľubovoľný argument  $\varphi$  čísla  $z$  spĺňa rovnosť

$$\cos \varphi = \operatorname{Re} z / |z| = -\sqrt{3}/2, \quad \sin \varphi = \operatorname{Im} z / |z| = -1/2.$$

Základný argument čísla  $z$  je  $\arg z = -5\pi/6$  a platí

$$z = 4 [\cos (-5\pi/6) + i \sin (-5\pi/6)].$$

### Príklad 3

Vypočítajte

$$(1 + i\sqrt{3})^{15}.$$

Použijeme Moivreov vzorec (8). Komplexné číslo  $z = 1 + i\sqrt{3}$  prepíšeme do goniometrického tvaru. Platí  $|z| = 2$ ,  $\arg z = \pi/3$ , a teda

$$z = 2 [\cos (\pi/3) + i \sin (\pi/3)].$$

Potom podľa (8) máme

$$z^{15} = 2^{15} [\cos (15\pi/3) + i \sin (15\pi/3)] = 2^{15} [\cos (5\pi) + i \sin (5\pi)] = -2^{15}.$$

Poznamenajme, že rovnaký výsledok by sme získali klasickým roznásobením podľa binomickej vety.

## Príklad 4

Vypočítajme v  $\mathbb{C}$

$$\sqrt[3]{-8}.$$

Podľa (12) existujú práve 3 komplexné tretie odmocniny z čísla  $z = -8$ .  
Goniometrický tvar čísla  $z$  je

$$z = 8 [\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)].$$

Podľa (12) platí

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} \left[ \cos \left( \frac{-\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-\pi + 2k\pi}{3} \right) \right],$$

pričom  $k = 0, 1, 2$ . Postupne dostávame

$$k = 0 \rightarrow \sqrt[3]{8} \left[ \cos \left( \frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-\pi}{3} \right) \right] = 1 - i\sqrt{3},$$

$$k = 1 \rightarrow \sqrt[3]{8} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right] = 1 + i\sqrt{3},$$

$$k = 2 \rightarrow \sqrt[3]{8} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2.$$



# Obsah

- 1 Komplexné čísla
- 2 Postupnosti, rady a funkcie**
- 3 Komplexná derivácia a holomorfné funkcie
- 4 Elementárne funkcie
- 5 Komplexný integrál a Cauchyho teória
- 6 Laurentov rad a teória rezíduí

# Postupnosti v $\mathbb{C}$

Nech  $r \in \mathbb{R}^+$  a  $z_0 \in \mathbb{C}$ . **Otvoreným kruhom**  $K(z_0, r)$  so stredom v bode  $z_0$  a s polomerom  $r$  rozumieme množinu  $K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ . Množina  $K(z_0, r)$  sa často označuje aj ako  **$r$ -okolie** bodu  $z_0$ . Ak  $z_0 = \infty$ , definujeme  $K(\infty, r) := \{z \in \tilde{\mathbb{C}}, |z| > 1/r\}$ . Nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť komplexných čísiel. Komplexné číslo  $a_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  sa nazýva **limitou** postupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , ak pre každé  $\varepsilon$ -okolie bodu  $a_0$  existuje index  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tak, že  $a_n \in K(a_0, \varepsilon)$  pre každý index  $n \geq n_\varepsilon$ . Potom píšeme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$  alebo aj  $a_n \rightarrow a_0$ .

## Veta 1

Nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť v  $\mathbb{C}$  a  $a_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ . Potom  $a_n \rightarrow a_0$  práve vtedy, keď

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_0| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a_0 \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a_0. \quad (19)$$

V tomto prípade platí i  $\overline{a_n} \rightarrow \overline{a_0}$ . Podobne,  $a_n \rightarrow \infty$  práve vtedy, keď

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty, \quad \text{resp.}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1/|a_n| = 0. \quad (20)$$

# Číselné rady v $\mathbb{C}$

Nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť v  $\mathbb{C}$ . Postupnosť  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$  (tzv. **postupnosť čiastočných súčtov**) definovaná ako  $s_k := \sum_{n=1}^k a_n$  sa nazýva **nekonečný rad** s členmi  $a_n$  a označuje sa  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , resp.  $\sum a_n$ . Rad  $\sum a_n$  **konverguje (resp., je konvergentný)**, ak existuje **konečná** limita postupnosti  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Túto limitu potom označujeme ako **súčet**  $s$  radu a píšeme  $s = \sum a_n$ . V opačnom prípade rad  $\sum a_n$  **diverguje (resp., je divergentný)**.

## Veta 2

Nech  $\sum a_n, \sum b_n$  sú konvergentné rady a  $a, b \in \mathbb{C}$ . Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (nutná podmienka konverencie radu).
- Rad  $\sum \overline{a_n}$  konverguje so súčtom  $\sum \overline{a_n} = \overline{\sum a_n}$ .
- Rad  $\sum (aa_n + bb_n)$  konverguje a  $\sum (aa_n + bb_n) = a \sum a_n + b \sum b_n$ .

## Veta 3

Komplexný rad  $\sum a_n$  konverguje práve vtedy, keď konverguje každý z reálnych radov  $\sum \operatorname{Re} a_n$  a  $\sum \operatorname{Im} a_n$ , pričom platí  $\sum a_n = \sum \operatorname{Re} a_n + i \sum \operatorname{Im} a_n$ .

Komplexný rad  $\sum a_n$  sa nazýva **absolútne konvergentný**, ak rad  $\sum |a_n|$  je konvergentný. Každý absolútne konvergentný rad je i konvergentný a platí

$$\left| \sum a_n \right| \leq \sum |a_n|.$$

Ak  $\sum a_n$  konverguje, ale rad  $\sum |a_n|$  diverguje, potom hovoríme, že rad  $\sum a_n$  konverguje **neabsolútne (relatívne)**. Platia nasledujúce výsledky.

#### Veta 4

*Komplexný rad  $\sum a_n$  konverguje absolútne práve vtedy, keď každý z reálnych radov  $\sum \operatorname{Re} a_n$  a  $\sum \operatorname{Im} a_n$  konverguje absolútne.*

#### Veta 5 (Riemannova veta o prerovnaní absolútne konvergentného radu)

*Ak komplexný rad  $\sum a_n$  konverguje absolútne, potom každé prerovnanie tohto radu konverguje absolútne s rovnakým súčtom, t.j., platí*

$$\sum a_{\tau(n)} = \sum a_n$$

*pre každú permutáciu  $\tau$  množiny  $\mathbb{N}$  (t.j., pre každú bijekciu  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ).*

Pri vyšetrowaní (absolútnej) konvergencie komplexných radov môžeme aplikovať mnohé kritériá využívané v reálnej analýze.

- **Porovnávacie kritérium** – ak komplexný rad  $\sum a_n$  spĺňa  $|a_n| \leq b_n$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$ , kde  $\sum b_n$  je konvergentný reálny rad, potom rad  $\sum a_n$  konverguje absolútne.
- **D'Alembertovo podielové kritérium** – ak komplexný rad  $\sum a_n$  spĺňa  $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$ , potom  $\sum a_n$  konverguje absolútne. Ak  $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$ , potom rad  $\sum a_n$  diverguje. Obzvlášť, ak existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = q \in \mathbb{R}^*$ , potom pre  $q < 1$  ( $q > 1$ ) rad  $\sum a_n$  konverguje absolútne (diverguje).
- **Cauchyho odmocninové kritérium** – ak komplexný rad  $\sum a_n$  spĺňa  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$ , potom  $\sum a_n$  konverguje absolútne. Ak  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$ , potom rad  $\sum a_n$  diverguje. Obzvlášť, ak existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^*$ , potom pre  $q < 1$  ( $q > 1$ ) rad  $\sum a_n$  konverguje absolútne (diverguje).
- **Cauchyho integrálne kritérium** – ak rad  $\sum a_n$  spĺňa  $|a_n| = f(n)$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$ , kde  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je nezáporná, nerastúca a spojitá funkcia, potom rad  $\sum a_n$  konverguje absolútne práve vtedy, keď nevlastný integrál  $\int_1^\infty f(x) dx$  konverguje.

## Príklad 5

Stanovme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n}{n!}.$$

Nájdeme reálnu a imaginárnu časť príslušnej postupnosti. Podľa Príkladu 1 platí

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^n}{n!} &= \frac{(\sqrt{2} [\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)])^n}{n!} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^n \cos(\pi n/4)}{n!} + i \frac{(\sqrt{2})^n \sin(\pi n/4)}{n!}. \end{aligned}$$

Teda máme

$$\operatorname{Re} \left( \frac{(1+i)^n}{n!} \right) = \frac{(\sqrt{2})^n \cos(\pi n/4)}{n!}, \quad \operatorname{Im} \left( \frac{(1+i)^n}{n!} \right) = \frac{(\sqrt{2})^n \sin(\pi n/4)}{n!}.$$

Keďže platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left( \frac{(1+i)^n}{n!} \right) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left( \frac{(1+i)^n}{n!} \right),$$

podľa Vety 1 limita v zadaní príkladu existuje a je rovná  $0 + i0 = 0$ .

## Príklad 6

Dokážme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n2^n} = 0.$$

Uvedený výsledok vyplýva z Vety 1, pretože platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{i^n}{n2^n} - 0 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|i|^n}{n2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n2^n} = 0.$$

## Príklad 7

Nájdime limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{in}.$$

Táto limita existuje a je nevlastná, pretože platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| n e^{in} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left| e^{in} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Pri výpočte sme využili prvú rovnosť v (15), t.j.,  $|e^{in}| = 1$ . Podľa Vety 1 potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{in} = \infty.$$

## Príklad 8

Nájdime súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + i(-1)^{n-1}n}{n^2}.$$

V danom rade oddelíme jeho reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1 + i(-1)^{n-1}n}{n^2} \right) = \frac{1}{n^2}, \quad \operatorname{Im} \left( \frac{1 + i(-1)^{n-1}n}{n^2} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Keďže z reálnej analýzy máme

$$\sum 1/n^2 = \pi^2/6, \quad \sum (-1)^{n-1}/n = \ln 2,$$

podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu a platí

$$\sum \frac{1 + i(-1)^{n-1}n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + i \ln 2.$$



## Príklad 9

Vyšetrite konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}.$$

Oddelením reálnej a imaginárnej časti daného radu dostaneme

$$\operatorname{Re} \left( \frac{i^n}{n} \right) = \begin{cases} (-1)^k / (2k), & n = 2k, \\ 0, & n = 2k - 1, \end{cases}$$
$$\operatorname{Im} \left( \frac{i^n}{n} \right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1} / (2k - 1), & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Obidva reálne rady  $\sum \operatorname{Re}$  a  $\sum \operatorname{Im}$  konvergujú (podľa Leibnizovho kritéria), a preto podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu.

## Príklad 10

Vyšetríme konvergenciu radov

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{3^n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} a^n, \quad a \in \mathbb{C}.$$

a) Rad konverguje absolútne podľa D'Alembertovho kritéria, nakoľko

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)(1+i)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n(1+i)^n}{3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(1+i)}{3n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt{2}}{3n} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

b) Aplikovaním Cauchyho odmocninového kritéria dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a| = |a|.$$

Pre  $|a| < 1$  daný rad konverguje absolútne, pre  $|a| > 1$  rad diverguje. V prípade  $|a| = 1$  rad diverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie vo Vete 2 ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n \neq 0$ , resp. neexistuje).

# Funkcie v $\mathbb{C}$

Nech  $\mathcal{D}$  je podmnožina v  $\tilde{\mathbb{C}}$ . Pod pojmom (komplexná) **funkcia** (komplexnej premennej)  $f$  budeme rozumieť priradenie, ktoré každému číslu  $z \in \mathcal{D}$  priradí jednu alebo viac hodnôt  $w \in \tilde{\mathbb{C}}$ . Množina  $\mathcal{D}$  sa nazýva **definičný obor** funkcie  $f$  a označuje sa  $\mathcal{D}(f)$ . Množina

$$\mathcal{H}(f) := \{w \in \tilde{\mathbb{C}}, w = f(z), z \in \mathcal{D}(f)\}$$

sa nazýva **obor hodnôt** funkcie  $f$ . Ak je každému  $z \in \mathcal{D}(f)$  priradená **práve jedna** hodnota  $w = f(z) \in \mathcal{H}(f)$ , potom hovoríme o **jednoznačnej funkcii**  $f$ . V opačnom prípade funkciu  $f$  označujeme ako **mnohoznačnú**. Vhodným zúžením oboru hodnôt  $\mathcal{H}(f)$  mnohoznačnej funkcie  $f$  dostaneme jednoznačnú funkciu – tzv. **jednoznačnú vetvu** komplexnej funkcie  $f$ . Vo všeobecnosti teda komplexná funkcia komplexnej premennej **nie je zobrazenie**, pričom symbol  $f(z)$  znamená podmnožinu v  $\mathcal{H}(f)$ . **Inverznou** funkciou k funkcii  $f : w = f(z), z \in \mathcal{D}(f)$ , rozumíme funkciu  $f^{-1} : z = f^{-1}(w)$ , ktorá každému  $w \in \mathcal{H}(f)$  priradí práve tie  $z \in \mathcal{D}(f)$ , pre ktoré  $w = f(z)$ . Zrejme  $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$  a  $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$ . Okrem toho,  $f(f^{-1}(w)) = w$ , pre každé  $w \in \mathcal{H}(f)$ , avšak **neplatí** všeobecne  $f^{-1}(f(z)) = z$ , pre  $z \in \mathcal{D}(f)$ . Inverzná funkcia  $f^{-1}$  môže byť jednoznačná i mnohoznačná.

Nech  $f$  je funkcia. Ak  $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$ , jedná sa o funkciu **reálnej premennej**, inak hovoríme o funkcii **komplexnej premennej**. V prípade  $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{R}$  máme **reálnu** funkciu, inak (t.j., pre  $\mathcal{H}(f) \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$ ) máme **komplexnú** funkciu. Ak platí dokonca  $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{C}$ , potom hovoríme o **konečnej** (komplexnej) funkcii.

Nech  $f$  je konečná funkcia komplexnej premennej. Potom existujú jediné reálne funkcie  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre každé  $z = x + iy \in \mathcal{D}(f) \cap \mathbb{C}$  platí

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y). \quad (21)$$

Funkcie  $u$  a  $v$  sa nazývajú **reálna** a **imaginárna** časť funkcie  $f$ , t.j.,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z). \quad (22)$$

Funkcia  $\bar{f}$  definovaná  $\bar{f}(z) := \overline{f(z)}$ ,  $z \in \mathcal{D}(f)$ , sa nazýva **funkcia komplexne združená** s  $f$ . Zrejme potom platí  $\bar{f}(z) = u(x, y) - i v(x, y)$  a

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{f(z) - \bar{f}(z)}{2i}, \quad z \in \mathcal{D}(f). \quad (23)$$

Limitu a spojitosť komplexnej funkcie  $f$  komplexnej premennej definujeme podobným spôsobom ako v reálnej analýze. Nech  $M \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$  a  $z_0$  je hromadný bod množiny  $M$ . Číslo  $w_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  nazývame **limitou funkcie  $f$  v bode  $z_0$  vzhľadom na množinu  $M$**  a píšeme

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0,$$

ak pre každé okolie  $\mathcal{O}(w_0)$  bodu  $w_0$  existuje rýdže okolie  $\mathcal{O}^*(z_0)$  bodu  $z_0$  také, že pre každé  $z \in \mathcal{O}^*(z_0) \cap M$  platí  $f(z) \in \mathcal{O}(w_0)$ . V prípade  $M = \mathcal{D}(f)$  dostávame limitu funkcie  $f$  v tradičnom slova zmysle, t.j.,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{D}(f)}} f(z) = w_0.$$

Okrem toho platia relácie

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w_0, \quad (24)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{f}(z) = \overline{w_0}. \quad (25)$$

Funkcia  $f$  je **spojitá** v bode  $z_0 \in \mathcal{D}(f)$ , ak  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . Pre spojitosť funkcie potom platia výsledky analogické s (24) a (25).

## Príklad 11

Príkladom reálnych funkcií komplexnej premennej sú funkcie

$$w = \operatorname{Re} z, \quad w = |z|, \quad w = \arg z.$$

Jedná sa o jednoznačné funkcie. Funkcia  $w = z^n$ , pre  $n \in \mathbb{N}$  pevné, je komplexná funkcia komplexnej premennej, kým funkcia  $w = e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , je komplexná funkcia reálnej premennej  $\varphi$ . Ďalej, funkcie

$$w = \operatorname{Arg} z, \quad w = \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ pevné,}$$

sú príkladmi mnohoznačných komplexných funkcií komplexnej premennej. Prvá z nich je nekonečne-značná, druhá je  $n$ -značná. Zúžením oboru hodnôt prvej z nich dostaneme napríklad už zmienenú jednoznačnú funkciu  $\tilde{w} = \arg z$ . Jednoznačnou vetvou druhej funkcie je napríklad funkcia (porovnaj s (12))

$$\tilde{w} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z}{n} + i \sin \frac{\arg z}{n} \right).$$

## Príklad 12

Stanovme limitu

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}.$$

V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Poznamenajme, že konvergencia  $z = x + iy \rightarrow 0$  je ekvivalentná s  $x \rightarrow 0$  &  $y \rightarrow 0$ . Platí

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + iy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x - iy)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} - i \frac{xy}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

Z reálnej analýzy funkcií dvoch premenných vieme ľahko ukázať, že limity

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

neexistujú. Podľa (24) potom neexistuje ani limita v zadaní príkladu.

### Príklad 13

Vypočítajme limitu

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}.$$

V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + iy)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{yx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

V tomto prípade platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Preto podľa (24) limita v zadaní príkladu má hodnotu  $0 + i0 = 0$ .



### Príklad 14

Zistíme limitu

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i}.$$

V limitovanej funkcii vykonáme algebraické úpravy (rozklad čitateľa na súčin)

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z + i)(z - i)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z + i) = 2i.$$

### Príklad 15

Rozhodnime o existencii limity

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}.$$

Dokážeme, že uvedená limita neexistuje. Nech  $z$  sa blíži k bodu  $0 = 0 + i0$  po reálnej osi, t.j.,  $z = x \in \mathbb{R}$ . Potom  $\bar{z}/z = \bar{x}/x = x/x = 1$ , a  $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}/z = 1$  v tomto prípade. Ak  $z$  sa bude k 0 blížiť po imaginárnej osi, t.j.,  $z = iy \in i\mathbb{R}$ , potom platí  $\bar{z}/z = -iy/iy = -1$ , a v tomto prípade  $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}/z = -1$ . Pri pohybe po dvoch rôznych cestách do bodu 0 sme dostali dve rôzne hodnoty limity. Preto daná limita neexistuje.

# Obsah

- 1 Komplexné čísla
- 2 Postupnosti, rady a funkcie
- 3 Komplexná derivácia a holomorfné funkcie**
- 4 Elementárne funkcie
- 5 Komplexný integrál a Cauchyho teória
- 6 Laurentov rad a teória rezíduí

# Derivácia komplexnej funkcie

## Definícia 1 (Komplexná diferencovateľnosť)

Nech  $G$  je otvorená podmnožina v  $\mathbb{C}$  a  $f$  je konečná funkcia definovaná na  $G$ . Hovoríme, že  $f$  je **komplexne diferencovateľná (monogénna)** v bode  $z_0 \in G$ , ak existuje **konečná** limita

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \left( \text{resp. } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right). \quad (26)$$

Limita v (26) sa nazýva **derivácia** funkcie  $f$  v bode  $z_0$  a označuje sa  $f'(z_0)$ , resp.  $\frac{df}{dz}(z_0)$ .

V komplexnej analýze sa teda nedefinuje nevlastná derivácia a derivácia v bode  $\infty$ . Z Definície 1 vyplýva, že funkcia  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  je komplexne diferencovateľná v bode  $z_0 \in G$  práve vtedy, keď existuje komplexné číslo  $a$  s vlastnosťou

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - ah}{h} = 0. \quad (27)$$

V tomto prípade  $a = f'(z_0)$ . Výraz  $ah$  sa nazýva **diferenciál funkcie**  $f$  v bode  $z_0$  a označuje sa  $df(z_0)$ , resp.  $df(z_0)(h)$ .

Komplexná derivácia má podobné základné vlastnosti ako derivácia v reálnom obore. Vo všeobecnosti je však komplexná diferencovateľnosť **podstatne silnejší** koncept než reálna diferencovateľnosť.

### Veta 6

*Ak funkcia  $f$  je komplexne diferencovateľná v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$ , potom je v bode  $z_0$  spojitá.*

### Dôkaz.

Výsledok vyplýva z Definície 1 a z nasledujúceho výpočtu

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) + f(z_0) \right) = f'(z_0) \cdot 0 + f(z_0) = f(z_0).$$



### Poznámka 2

Poznamenajme, že podobne ako v reálnom obore spojitosť funkcie **nezaručuje** komplexnú diferencovateľnosť funkcie. Túto skutočnosť ilustruje Príklad 17.

## Veta 7 (Základné vlastnosti)

- (i) Ak funkcie  $f, g$  sú komplexne diferencovateľné v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$ , potom aj funkcie  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  a  $f/g$  (ak  $g(z_0) \neq 0$ ) sú komplexne diferencovateľné v bode  $z_0$  a platí

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$

$$(f/g)'(z_0) = [f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)] / [g(z_0)]^2.$$

- (ii) Ak funkcia  $f$  je komplexne diferencovateľná v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  a funkcia  $g$  je komplexne diferencovateľná v bode  $f(z_0)$ , potom aj zložená funkcia  $g \circ f$  je komplexne diferencovateľná v  $z_0$  a platí  $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ .
- (iii) Ak funkcia  $f$  je komplexne diferencovateľná v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  a prostá na okolí bodu  $z_0$ , potom inverzná funkcia  $f^{-1}$  je komplexne diferencovateľná v bode  $w_0 = f(z_0)$  a platí

$$(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0).$$

V nasledujúcom budeme pracovať s algebraickým tvarom komplexných čísel a funkcií, t.j., podľa (21) pre dané  $z \in \mathbb{C}$  a danú komplexnú funkciu  $f$  máme

$$z = x + iy \quad \text{a} \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{pre } x, y \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Pripomeňme, že jednoznačne určené reálne funkcie  $u, v$  sú podľa (22) reálnou a imaginárnou časťou funkcie  $f$ .

### Veta 8 (Nutná podmienka komplexnej diferencovateľnosti)

Nech funkcia  $f$  je komplexne diferencovateľná v bode  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Potom funkcie  $u, v$  v (28) spĺňajú tzv. **Cauchyho–Riemannove rovnice (podmienky)**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (29)$$

Pre deriváciu  $f'(z_0)$  potom platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (30)$$

## Náčrt dôkazu.

Ak  $f$  je komplexne diferencovateľná v bode  $z_0$ , potom podľa Definície 1 je  $f$  definovaná na nejakom okolí bodu  $z_0$  a existuje limita v (26). Hodnota tejto limity nezávisí na ceste, po ktorej sa s premenlivým bodom  $z$  blížíme do bodu  $z_0$ . Uvažujme napríklad  $z = x + iy_0$ , kde  $x \in \mathbb{R}$  a  $x \rightarrow x_0$ . Do  $z_0 = x_0 + iy_0$  sa teda blížíme po priamke  $y = y_0$ . Platí potom

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z=x+iy_0 \\ x \rightarrow x_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0}.$$

Pomocou funkcií  $u, v$  sa posledná limita dá rozpísať do tvaru

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right). \end{aligned}$$

Limitovaním posledného výrazu dostaneme prvú rovnosť v (30). Podobným spôsobom odvodíme i druhé vyjadrenie derivácie  $f'(z_0)$  v (30), kde uvažujeme  $z = x_0 + iy$  s  $y \in \mathbb{R}$  a  $y \rightarrow y_0$  (priamka  $x = x_0$ ). Porovnaním reálnych a imaginárnych častí vyjadrení v (30) dostaneme rovnosti (29). ■

### Poznámka 3

Z Vety 8 vyplýva, že **nutnými podmienkami** existencie komplexnej derivácie  $f'(z_0)$  je existencia prvých parciálnych derivácií reálnych funkcií  $u, v$  v bode  $[x_0, y_0]$  a platnosť Cauchyho–Riemannových podmienok (29) v bode  $[x_0, y_0]$ . Ako však ukazuje nasledujúca veta, **nie sú** to zároveň aj **postačujúce podmienky**.

### Veta 9 (Nutná a postačujúca podmienka komplexnej diferencovateľnosti)

*Funkcia  $f$  je komplexne diferencovateľná v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  práve vtedy, keď reálne funkcie  $u, v$  v (28) sú diferencovateľné v  $[x_0, y_0]$  a platia rovnice v (29).*

Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je otvorená množina. Hovoríme, že komplexná funkcia  $f$  je **komplexne diferencovateľná na  $G$** , ak  $f'(z)$  existuje v každom bode  $z \in G$ . Z Vety 9 vyplýva, že ak funkcie  $u, v$  v (28) majú spojité I. parciálne derivácie na  $G$  a spĺňajú podmienky (29) na  $G$ , potom  $f$  je komplexne diferencovateľná v  $G$ .



Cauchyho–Riemannove podmienky (29) výrazne obmedzujú triedu reálnych diferencovateľných funkcií  $u, v$ , ktoré môžu byť reálnymi, resp. imaginárnymi časťami komplexne diferencovateľných funkcií. Ak totiž funkcia  $f = u + iv$  je komplexne diferencovateľná v otvorenej množine  $G \subseteq \mathbb{C}$  a funkcie  $u, v$  majú navyše spojité i druhé parciálne derivácie na  $G$ , potom  $u, v$  sú riešeniami tzv. **Laplaceovej rovnice** na  $G$ , t.j., platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{na } G. \quad (31)$$

Riešenia Laplaceovej rovnice sa označujú ako **harmonické funkcie**. Reálne a imaginárne časti komplexne diferencovateľných funkcií v  $G$  musia preto byť nutne harmonickými funkciami v  $G$ . Neskôr ukážeme, že požiadavka existencie a spojitosti druhých (dokonca i všetkých vyšších) parciálnych derivácií funkcií  $u, v$  na  $G$  je prekvapivo prirodzene zabudovaná v koncepte komplexnej derivácie funkcie  $f$  na množine  $G$ .

### Veta 10

*Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je jednoducho súvislá oblasť. Potom ku každej harmonickej funkcii  $u$  (resp.  $v$ ) na  $G$  existuje funkcia  $f$  komplexne diferencovateľná na  $G$  tak, že  $u = \operatorname{Re} f$  (resp.  $v = \operatorname{Im} f$ ) na  $G$ .*

## Príklad 16

Dokážme, že pre každé pevné  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Označme  $f(z) = z^n$  a nech  $z_0 \in \mathbb{C}$  je zafixované. Podľa Definície 1 máme

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) \\ &= nz_0^{n-1}. \end{aligned}$$

## Príklad 17

Funkcia  $f(z) = \bar{z} = x - iy$  je síce spojitá v celej komplexnej rovine, ale nie je nikde v  $\mathbb{C}$  komplexne diferencovateľná, pretože limita

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\bar{z}_0 + \bar{h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\bar{h}}{h}$$

neexistuje pre žiadne  $z_0 \in \mathbb{C}$  (porovnaj s Príkladom 15).

## Príklad 18

Rozhodnime o existencii derivácie funkcie (ako funkcie v  $\mathbb{C}$ )

$$f(z) = 1/z$$

overením Cauchyho–Riemannovych rovností (29). Zrejme  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  
Oddelíme reálnu a imaginárnu časť funkcie  $f$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Platí  $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ ,  $v(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$ , a ďalej

$$\begin{aligned} u'_x &= (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2, & u'_y &= (-2xy)/(x^2 + y^2)^2, \\ v'_x &= (2xy)/(x^2 + y^2)^2, & v'_y &= (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2, \end{aligned}$$

Funkcie  $u, v$  sú diferencovateľné na  $\mathcal{D}(f)$  a platia rovnosti (29) na  $\mathcal{D}(f)$ . Teda podľa Vety 9 funkcia  $f$  je komplexne diferencovateľná na  $\mathcal{D}(f)$  a platí

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = u'_x + iv'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{(\bar{z})^2}{|z|^4} = -\frac{1}{z^2}.$$

## Príklad 19

Určme komplexne diferencovateľnú funkciu  $f$ , ktorá spĺňa

$$\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1, \quad f(0) = 1.$$

Funkcia  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$  je harmonická v  $\mathbb{C}$ , nakoľko

$$u'_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x, \quad u''_{xx} = 6x + 6,$$

$$u'_y = -6xy - 6y, \quad u''_{yy} = -6x - 6,$$

↓

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad \forall \mathbb{R}^2.$$

Podľa Vety 10 je funkcia  $u$  reálnou časťou istej funkcie  $f$ , ktorá je komplexne diferencovateľná na  $\mathbb{C}$ . Jej imaginárnu časť  $v$  určíme z podmienok (29)

$$v'_x = -u'_y = 6xy + 6y, \quad v'_y = u'_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x.$$

Máme teda určiť kmeňovú funkciu  $v$  pre dvojicu  $6xy + 6y$  a  $3x^2 - 3y^2 + 6x$ .

**Príklad 19**

Postupujúc štandardným spôsobom, dostaneme

$$v(x, y) = -y^3 + 3x^2y + 6xy + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Keďže  $f(0) = 1$ , platí  $v(0, 0) = \operatorname{Im} f(0) = 0$ , a teda  $K = 0$ . Funkcia  $f$  má tvar

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1 + i(-y^3 + 3x^2y + 6xy).$$

Nakoniec, ak dosadením za reálne premenné  $x, y$  výrazy

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/2i,$$

dostaneme vyjadrenie hodnoty  $f(z)$  pomocou komplexnej premennej  $z$ . Po úpravách získame finálny predpis

$$f(z) = z^3 + 3z^2 + 1.$$

# Holomorfné funkcie

## Definícia 2 (Holomorfná funkcia)

Hovoríme, že funkcia  $f$  je **holomorfná (analytická, regulárna)** v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$ , ak  $f$  má deriváciu na nejakom okolí bodu  $z_0$ . Funkcia  $f$  je **holomorfná na množine**  $G \subseteq \mathbb{C}$ , ak je holomorfná v každom bode  $z \in G$ .

Pojem holomorfnosti funkcie (na rozdiel od komplexnej diferencovateľnosti) je možné zaviesť i pre nevlastný bod  $\infty$ . Konkrétne, funkcia  $f(z)$  sa označuje ako holomorfná v bode  $\infty$ , ak funkcia  $f(1/z)$  je holomorfná v bode  $z_0 = 0$ .

## Príklad 20

Z predchádzajúcich príkladov (Príklady 16, 17 a 18) vyplýva, že funkcia  $f(z) = z^n$  je holomorfná v celej komplexnej rovine, funkcia  $g(z) = \bar{z}$  nie je holomorfná v žiadnom bode  $z \in \tilde{\mathbb{C}}$  a funkcia  $h(z) = 1/z$  je holomorfná na  $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ .

## Príklad 21

Funkcia  $f(z) = |z|^2$  nie je holomorfná v žiadnom bode  $z \in \tilde{\mathbb{C}}$ , hoci je komplexne diferencovateľná v bode  $z_0 = 0$ , ako sa možno ľahko presvedčiť.

## Veta 11

Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je oblasť. Funkcia  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  je konštantná na  $G$  práve vtedy, keď je holomorfná na  $G$  a  $f'(z) = 0$  pre každé  $z \in G$ .

## Dôkaz.

Implikácia " $\Rightarrow$ " vyplýva priamo z Definícií 1 a 2. Naopak, nech  $f$  je holomorfná na  $G$  s  $f'(z) = 0$  pre každé  $z \in G$ . Funkcie  $u, v$  z (28) podľa (30) spĺňajú

$$u'_x(x, y) = 0 = v'_x(x, y), \quad v'_y(x, y) = 0 = -u'_y(x, y) \quad \text{pre každé } [x, y] \in G,$$

z čoho vyplýva, že funkcie  $u, v$  sú konštantné na oblasti  $G$ . To znamená, že i funkcia  $f = u + iv$  je konštantná na  $G$ . ■

## Dôsledok 1

Nech  $f, g$  sú funkcie holomorfné na oblasti  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Potom platia tvrdenia.

- (i) Rovnosť  $f' \equiv g'$  platí na  $G$  práve vtedy, keď  $f \equiv g + K$  na  $G$ , kde  $K$  je (komplexná) konštanta.
- (ii) Funkcia  $f$  je polynóm stupňa menšieho ako  $n$  na  $G$  práve vtedy, keď  $f^{(n)} \equiv 0$  na  $G$ .

# Komplexné funkcionálne rady

Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je neprázdna množina a nech  $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť funkcií definovaných na  $G$ . Postupnosť čiastočných súčtov  $\{s_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  definovaná

$$s_k(z) := \sum_{n=1}^k f_n(z), \quad z \in G, \quad k \in \mathbb{N},$$

sa nazýva **(nekonečný) funkcionálny rad** s členmi  $f_n$  a označuje sa  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ , resp.  $\sum f_n(z)$ . Rozlišujeme dva typy konvergence funkcionálnych postupností a radov.

- **Bodová konvergencia na  $G$**  – pre každé  $z_0 \in G$  je číselná postupnosť  $\{f_n(z_0)\}$  (číselný rad  $\sum f_n(z_0)$ ) konvergentná(y). Funkcia  $f$  s vlastnosťou

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \quad \left( f(z) = \sum f_n(z) \right) \quad \text{pre každé } z \in G,$$

sa nazýva **limitná funkcia postupnosti (súčet radu)**. Symbolicky značíme

$$f_n \rightarrow f \quad \left( \sum f_n \rightarrow f \right) \quad \text{na } G.$$



- **Rovnomerná konvergencia na  $G$**  – zhruba povedané, konvergencia k limitnej funkcii (k súčtu) **nezávisí** na premennej  $z$ . Presnejšie, ak  $f$  je limitná funkcia postupnosti  $\{f_n\}$ , potom pre každé  $\varepsilon > 0$  existuje index  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tak, že

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{pre každé } n \geq n_\varepsilon \text{ a pre každé } z \in G.$$

Rad  $\sum f_n(z)$  konverguje rovnomerne k súčtu  $f$  na  $G$ , ak jeho príslušná postupnosť čiastočných súčtov  $\{s_k\}$  konverguje rovnomerne k  $f$  na  $G$ . Symbolicky zapisujeme  $f_n \rightrightarrows f$  ( $\sum f_n \rightrightarrows f$ ) na  $G$ .

### Veta 12 (Cauchyho–Bolzanove kritériá rovnomernej konvergencie)

*Postupnosť  $\{f_n\}$  konverguje rovnomerne na  $G$  práve vtedy, keď pre každé  $\varepsilon > 0$  existuje index  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tak, že*

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \quad \text{pre každé } n, m \geq n_\varepsilon \text{ a pre každé } z \in G.$$

*Rad  $\sum f_n$  konverguje rovnomerne na  $G$  práve vtedy, keď pre každé  $\varepsilon > 0$  existuje index  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tak, že*

$$\left| \sum_{k=n}^{m+n} f_k(z) \right| < \varepsilon \quad \text{pre každé } n \geq n_\varepsilon, m \in \mathbb{N}, \text{ a pre každé } z \in G.$$

Cauchyho–Bolzanove kritéria udávajú nutné a zároveň postačujúce podmienky rovnomernej konvergencie postupnosti (radu) funkcií. Pre praktické výpočty sa však s výhodou využíva nasledujúce postačujúce kritérium.

### Veta 13 (Weierstrassovo kritérium rovnomernej konvergencie)

Ak pre rad  $\sum f_n$  existuje konvergentný reálny číselný rad  $\sum \alpha_n$  s vlastnosťou

$$|f_n(z)| \leq \alpha_n \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N} \text{ a pre každé } z \in G,$$

potom rad  $\sum f_n$  konverguje rovnomerne na množine  $G$ .

Reálny číselný rad  $\sum \alpha_n$  vo Vete 13 sa nazýva **majorantný rad (majoranta)** pre funkcionálny rad  $\sum f_n$ .

### Veta 14

Nech  $\{f_n\}$  je postupnosť funkcií spojitých na množine  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Ak rad  $\sum f_n$  konverguje rovnomerne na  $G$  k súčtu  $f$ , potom funkcia  $f$  je spojitá na  $G$ .

# Mocninové rady

Dôležitým typom funkcionálnych radov sú tzv. **mocninové rady**, t.j., rady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (32)$$

kde  $z_0, a_n \in \mathbb{C}$  pre každé  $n \in \mathbb{N}_0$ . Číslo  $z_0$  sa nazýva **stred mocninového radu** (32) a čísla  $a_n$  jeho **koefficienty**. Množina všetkých komplexných čísel  $z$ , pre ktoré rad (32) konverguje, sa nazýva **obor konvergenie** mocninového radu. Je zrejmé, že obor konvergenie ľubovoľného mocninového radu je vždy neprázdna podmnožina v  $\mathbb{C}$  (rad (32) vždy konverguje vo svojom strede  $z_0$ ). Nasledujúce dve vety popisujú štruktúru oboru konvergenie mocninových radov.

## Veta 15 (Abelova veta)

*Ak mocninový rad (32) konverguje v istom komplexnom čísle  $z_1 \neq z_0$ , potom konverguje absolútne v každom  $z \in \mathbb{C}$  spĺňajúcom*

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

**Veta 16 (Cauchyho–Hadamardova veta)**

Pre rad (32) definujme nezáporné reálne číslo  $R$  predpisom

$$R := 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (33)$$

Potom platia nasledujúce tvrdenia.

- (i) Ak  $R = 0$ , potom rad (32) konverguje iba vo svojom strede  $z_0$  (teda diverguje na  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ).
- (ii) Ak  $R = \infty$ , potom rad (32) konverguje absolútne v každom  $z \in \mathbb{C}$ .
- (iii) Ak  $0 < R < \infty$ , potom rad (32) konverguje absolútne pre každé  $z \in \mathbb{C}$  spĺňajúce  $|z - z_0| < R$  a diverguje pre každé  $z \in \mathbb{C}$  spĺňajúce  $|z - z_0| > R$ .

Číslo  $R$  v (33) sa nazýva **polomer konvergencie** mocninového radu (32). Pre  $R$  kladné a konečné sa množina

$$\{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\} \quad (34)$$

označuje ako **konvergenčný kruh** radu (33). Rad (33) konverguje absolútne vo svojom konvergenčnom kruhu. Navyiac, môže konvergovať v niektorých bodoch tzv. **konvergenčnej kružnice**  $|z - z_0| = R$ .

### Poznámka 4

Ak existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , potom polomer konvergence  $R$  radu (32) spĺňa

$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (35)$$

Ak navyše existuje i  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ , potom polomer konvergence  $R$  je možné vyjadriť aj v tvare

$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (36)$$

Identita (36) vyplýva z nerovností

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

### Veta 17

*Rad (32) s kladným polomerom konvergence konverguje absolútne vo svojom konvergenčnom kruhu. Navyše, rad (32) konverguje rovnomerne na každej kompaktnej podmnožine svojho konvergenčného kruhu.*

**Veta 18**

Nech mocninový rad (32) má kladný polomer konvergence  $R$  a nech  $f$  značí súčet radu (32), t.j.,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Potom funkcia  $f$  je spojité a holomorfná v konvergenčnom kruhu radu (32) a

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n \quad (37)$$

pre každé  $z \in \mathbb{C}$  spĺňajúce  $|z - z_0| < R$ . Obzvlášť, mocninový rad (37) (tzv. derivácia radu (32)) má opäť polomer konvergence  $R$ .

Z Vety 18 vyplýva, že súčet každého mocninového radu je funkcia holomorfná v konvergenčnom kruhu tohto radu. Navyiac, tento súčet má derivácie všetkých rádov, ktoré sú opäť holomorfné v danom konvergenčnom kruhu. Neskôr ukážeme, že **každá holomorfná** funkcia (na otvorenej podmnožine v  $\mathbb{C}$ ) sa dá vyjadriť ako **súčet istého mocninového radu**.

## Príklad 22

Najjednoduchším netriviálnym príkladom mocninového radu je **geometrický rad**

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots,$$

pozri tiež Príklad 10 b). Jedná sa o mocninový rad so stredom v bode  $z_0 = 0$ . Nakoľko v tomto prípade  $a_n = 1$  pre každé  $n \in \mathbb{N}_0$ , platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Pre polomer konvergenzie teda máme  $R = 1$  a konvergenčný kruh daného radu má tvar  $|z| < 1$ , podľa Vety 16. Ako sme ukázali v Príklade 10 b), kruh  $|z| < 1$  je zároveň aj oborom konvergenzie daného radu (geometrický rad v zadaní totiž diverguje v každom bode konvergenčnej kružnice  $|z| = 1$ ).

## Príklad 23

Nájdime polomery konvergence mocninových radov

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} (n!) z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

a) Platí  $a_n = n!$  pre  $n \in \mathbb{N}_0$ . Keďže existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

podľa formuly (36) v Poznámke 4 polomer konvergence je  $R = 1/\infty = 0$ . V súlade s Vetou 16(i) teda daný rad konverguje iba vo svojom strede  $z = 0$ .

b) V tomto prípade máme  $a_n = 1/n!$  pre  $n \in \mathbb{N}_0$  a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Pre polomer konvergence potom platí  $R = 1/0 = \infty$ . Podľa Vety 16(ii) rad konverguje absolútne v celej komplexnej rovine.



## Príklad 24

Určme obor konvergence mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^n}.$$

Koeficienty tohto radu majú tvar  $a_n = \frac{1}{(n+2)^3 4^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ďalej platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+3)^3 4^{n+1}}}{\frac{1}{(n+2)^3 4^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left( \frac{n+2}{n+3} \right)^3 = \frac{1}{4}.$$

Preto polomer konvergence je  $R = 4$ . Podľa Vety 16(iii) rad v zadaní príkladu konverguje absolútne na množine  $|z+2| < 4$  a diverguje pre  $|z+2| > 4$ . V prípade bodov konvergenčnej kružnice, t.j.,  $|z+2| = 4$ , platí

$$\left| \frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^n} \right| = \frac{|z+2|^n}{(n+2)^3 4^n} = \frac{4^n}{(n+2)^3 4^n} = \frac{1}{(n+2)^3}.$$

Z reálnej analýzy vieme, že číselný rad  $\sum 1/(n+2)^3$  je konvergentný. Preto podľa porovnávacieho kritéria rad v zadaní príkladu konverguje absolútne i na konvergenčnej kružnici. Obor konvergence je teda uzavretý kruh  $|z+2| \leq 4$ .

## Príklad 25

Nájdime obor konvergence radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n}.$$

Jedná sa o mocninový rad  $\sum a_n z^n$ , v ktorom niektoré mocniny  $z$  “chýbajú”

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n} = 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + (1/1) \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + (1/2) \cdot z^6 + \dots$$

Všeobecný koeficient  $a_n$  tohto radu možno zapísať v tvare

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 0, n = 3k - 2, n = 3k - 1, \\ 3/n, & n = 3k \neq 0. \end{cases}$$

Postupnosť  $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$  má teda dva hromadné body, 0 a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3/n} = 1$ .

To znamená, že  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , a polomer konvergence  $R = 1$ . Rad v zadaní preto konverguje absolútne v kruhu  $|z| < 1$  a diverguje pre  $|z| > 1$ .

## Príklad 25

Vyšetríme teraz konvergenciu radu na konvergenčnej kružnici  $|z| = 1$ . Každé takéto  $z$  má podľa (3) goniometrický tvar  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ . Dosadením do radu v zadaní a využitím Moivreovho vzorca (8) dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{3n}}{n} \stackrel{(8)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n\varphi + i \sin 3n\varphi}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\cos 3n\varphi/n) + i \sum_{n=1}^{\infty} (\sin 3n\varphi/n). \end{aligned}$$

Pre  $3\varphi \neq 2k\pi$  sú obidva reálne rady v poslednom výraze konvergentné, podľa Dirichletovho kritéria. Teda konverguje i pôvodný komplexný rad v zadaní. Vo zvyšných prípadoch, t.j., v súlade s  $-\pi \leq \varphi < \pi$ , pre

$$\varphi_1 = -2\pi/3 \rightsquigarrow z_1 = \cos(-2\pi/3) + i \sin(-2\pi/3) = -(1 + i\sqrt{3})/2,$$

$$\varphi_2 = 0 \rightsquigarrow z_2 = \cos 0 + i0 = 1,$$

$$\varphi_3 = 2\pi/3 \rightsquigarrow z_3 = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3) = (-1 + i\sqrt{3})/2$$

daný komplexný rad diverguje. Obor konvergence je teda uzavretý kruh  $|z| \leq 1$  okrem vyššie uvedených bodov  $z_1, z_2, z_3$ .

# Obsah

- 1 Komplexné čísla
- 2 Postupnosti, rady a funkcie
- 3 Komplexná derivácia a holomorfné funkcie
- 4 Elementárne funkcie**
- 5 Komplexný integrál a Cauchyho teória
- 6 Laurentov rad a teória rezíduí

# Polynómy a racionálne lomené funkcie

**Polynómom** stupňa  $n \in \mathbb{N}_0$  rozumieme funkciu komplexnej premennej  $z$  tvaru

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad (38)$$

kde komplexné čísla  $a_0, a_1, \dots, a_n, a_n \neq 0$ , sa nazývajú **koeficienty** polynómu. Ak  $a_0 = \cdots = a_n = 0$ , t.j.,  $P(z) \equiv 0$  v  $\mathbb{C}$ , hovoríme o tzv. **nulovom polynóme**. Stupeň nulového polynómu kladieme  $-\infty$ . Je ďalej zrejmé, že každá nenulová konštantná funkcia je polynómom stupňa 0. Komplexné číslo  $z_0$  s vlastnosťou

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z),$$

kde  $Q(z)$  je polynóm s vlastnosťou  $Q(z_0) \neq 0$ , nazývame  **$k$ -násobným koreňom polynómu  $P$** .

## Veta 19 (Základná veta algebry)

*Každý polynóm stupňa väčšieho ako nula s komplexnými koeficientami má v  $\mathbb{C}$  aspoň jeden koreň.*

Priamym dôsledkom Vety 19 je skutočnosť, že každý polynóm  $P$  stupňa  $n > 0$  má v  $\mathbb{C}$  **práve  $n$  koreňov** vrátane ich násobností. To dáva rozklad polynómu  $P$

$$P(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_l)^{k_l}, \quad (39)$$

kde  $z_1, z_2, \dots, z_l$  sú navzájom rôzne korene polynómu  $P$  s odpovedajúcimi násobnosťami  $k_1, k_2, \dots, k_l$ , pričom platí  $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$ . Polynómy sú funkcie **spojité a holomorfné v celej komplexnej rovine** s deriváciou

$$P'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \cdots + 2a_2z + a_1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Racionálnu lomenú funkciu** definujeme ako podiel dvoch polynómov, t.j.,

$$f(z) = P(z)/Q(z), \quad (40)$$

kde  $P, Q$  sú polynómy a  $Q \not\equiv 0$ . Definičný obor racionálnej lomenej funkcie  $f$  je množina  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, Q(z) = 0\}$ . Každá racionálna lomená funkcia  $f$  v (40) sa dá vyjadriť ako súčet polynómu a konečného počtu **parciálnych zlomkov** tvaru

$$A/(z - \alpha)^k,$$

kde  $A \in \mathbb{C}$  a  $\alpha \in \mathbb{C}$  je aspoň  $k$ -násobný koreň polynómu  $Q$ . Racionálne lomené funkcie sú **spojité a holomorfné všade na svojich definičných oboroch**.

# Exponenciálna funkcia

**Exponenciálnu funkciu** komplexnej premennej  $z$  definujeme vzťahom

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (41)$$

Mocninový rad v (41) konverguje absolútne v celej komplexnej rovine (polomer konvergenie  $R = \infty$ ). Podľa Viet 17 a 18 je preto funkcia  $\exp z$  **definovaná a holomorfná v celom  $\mathbb{C}$**  s deriváciou

$$(\exp z)' = \exp z \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C}. \quad (42)$$

Z definície v (41) ďalej vyplýva, že platí

$$\exp 0 = 1, \quad (\exp z) \cdot (\exp w) = \exp(z + w), \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (43)$$

Exponenciálna funkcia  $\exp z$  je preto **nenulová v celej komplexnej rovine** a

$$(\exp z)^{-1} = \exp(-z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (44)$$

Vlastnosti (42), (43) a (44) naznačujú, že funkcia  $\exp z$  je **holomorfným rozšírením** reálnej exponenciálnej funkcie  $e^x$  z  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{C}$ . Budeme preto používať označenie  $e^z$  namiesto  $\exp z$ .

## Veta 20 (Jednoznačnosť exponenciálnej funkcie)

Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je oblasť obsahujúca bod 0. Komplexná funkcia  $f$  definovaná na  $G$  je exponenciálnou funkciou na  $G$ , t.j., platí  $f(z) = e^z$  pre každé  $z \in G$ , práve vtedy, keď  $f$  je holomorfná na  $G$  a platí  $f(0) = 1$  a  $f'(z) = f(z)$  na  $G$ .

## Dôsledok 2

Pre každé  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  platia nasledujúce tvrdenia.

- (i)  $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ .
- (ii)  $\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$ ,  $\operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)$ ,  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ .
- (iii)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x$ ,  $\arg e^z \equiv \operatorname{Im} z = y \pmod{2\pi}$ .

Poznamenajme, že z Dôsledku 2(iii) vyplýva, že **oborom hodnôt** funkcie  $e^z$  sú všetky **nenulové komplexné čísla**  $z$ , t.j., množina  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Ďalej platia relácie

$$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (45)$$

$$e^z = -1 \iff z = (2k - 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (46)$$

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (47)$$

Podľa (47) je teda funkcia  $e^z$  **periodická** s množinou všetkých periód  $2\pi i\mathbb{Z}$ .



# Goniometrické a hyperbolické funkcie

**Goniometrické funkcie** sínus, kosínus, tangens a kotangens pre  $z \in \mathbb{C}$  definujeme

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad (48)$$

$$\operatorname{tg} z = \sin z / \cos z, \quad \operatorname{cotg} z = \cos z / \sin z. \quad (49)$$

K nim odpovedajúce komplexné **hyperbolické funkcie** sa definujú

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (50)$$

$$\operatorname{tgh} z = \operatorname{sh} z / \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{cotgh} z = \operatorname{ch} z / \operatorname{sh} z. \quad (51)$$

Platia tzv. **Eulerove vzorce**

$$\cos z \pm i \sin z = e^{\pm iz}, \quad \operatorname{ch} z \pm \operatorname{sh} z = e^{\pm z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (52)$$

ktoré dávajú do súvislosti goniometrické funkcie  $\sin z$ ,  $\cos z$ , resp. hyperbolické funkcie  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ , s exponenciálnou funkciou  $e^z$ .

Pomocou formúl (52) je možné pre každé  $z \in \mathbb{C}$  ľahko odvodiť vyjadrenia

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (53)$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (54)$$

Definície v (48) a (50) ďalej dávajú vzájomné vzťahy medzi funkciami  $\sin z$ ,  $\operatorname{sh} z$  a  $\cos z$ ,  $\operatorname{ch} z$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin(iz), \quad \sin z = -i \operatorname{sh}(iz), \quad (55)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz), \quad \cos z = \operatorname{ch}(iz). \quad (56)$$

Z identít (53), (54) a z vlastností exponenciálnej funkcie  $e^z$  vyplýva, že funkcie  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$  a  $\operatorname{ch} z$  sú **definované a holomorfné v celej komplexnej rovine** a

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (57)$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z. \quad (58)$$

Hovoríme preto, že tieto funkcie sú **holomorfnými rozšíreniami** reálnych funkcií  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sinh x$  a  $\cosh x$  z  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{C}$ .

Goniometrické a hyperbolické funkcie spĺňajú všetky formuly platiace pre ich reálne analógie. Napríklad, pre každé  $z \in \mathbb{C}$  platia rovnosti

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Funkcie  $\sin z$  a  $\operatorname{sh} z$  sú **nepárne**, t.j.,

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z,$$

kým funkcie  $\cos z$  a  $\operatorname{ch} z$  sú **párne**, t.j.,

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z.$$

Funkcie  $\sin z$ ,  $\cos z$  sú **periodické** s možnou všetkých periód  $2\pi\mathbb{Z}$ . Funkcie  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$  sú **periodické** s periódami  $2\pi i\mathbb{Z}$ . Ďalej platia relácie

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (59)$$

$$\cos z = 0 \iff z = (2k - 1)\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (60)$$

$$\operatorname{sh} z = 0 \iff z = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (61)$$

$$\operatorname{ch} z = 0 \iff z = (2k - 1)\pi i/2, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (62)$$

## Veta 21

Pre každé  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  platia nasledujúce tvrdenia.

- (i)  $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$
- (ii)  $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}, \quad \cos \bar{z} = \overline{\cos z}.$
- (iii)  $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}, \quad |\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$

## Veta 22

Pre každé  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  platia nasledujúce tvrdenia.

- (i)  $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y, \quad \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y.$
- (ii)  $\operatorname{sh} \bar{z} = \overline{\operatorname{sh} z}, \quad \operatorname{ch} \bar{z} = \overline{\operatorname{ch} z}.$
- (iii)  $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}, \quad |\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}.$

Z Vety 21(iii) vyplýva, že goniometrické funkcie  $\sin z$  a  $\cos z$  sú **v komplexnom obore neohraničené** (na rozdiel od reálneho oboru), nakoľko reálny hyperbolický sínus  $\operatorname{sh} y$  nie je ohraničený v  $\mathbb{R}$ . **Oborom hodnôt** funkcií  $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$  je **celé  $\mathbb{C}$** .

# Logaritmická funkcia

Funkcia inverzná k exponenciálnej funkcii  $e^z$  sa nazýva **logaritmus (logaritmická funkcia)**. Keďže funkcia  $e^z$  je periodická (s periódami  $2\pi i\mathbb{Z}$ ), logaritmus je vo všeobecnosti **mnohoznačná funkcia** a označujeme ju  $\text{Log}$ . Logaritmická funkcia je definovaná pre **nenulové komplexné čísla**, pričom pre každé  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  platí

$$\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (63)$$

Funkcia  $\text{Log}$  v (63) spĺňa základné vlastnosti

$$e^{\text{Log } z} = z, \quad \text{Log}(e^z) = z + 2k\pi i, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (64)$$

Každá celočíselná hodnota  $k$  v (63) určuje jedinú **jednoznačnú vetvu** logaritmu  $\text{Log}$ . Pre  $k = 0$  dostaneme tzv. **hlavnú vetvu** logaritmu, ktorá sa označuje  $\log$ . Pre každé nenulové komplexné číslo  $z$  potom platí

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, \quad \text{Re}(\log z) = \ln |z|, \quad \text{Im}(\log z) = \arg z. \quad (65)$$

**Obor hodnôt hlavnej vetvy** logaritmu  $\log$  je množina  $\{w \in \mathbb{C}, -\pi \leq w < \pi\}$ .

## Veta 23

Hlavná vetva logaritmu  $\log$  je funkcia holomorfná na množine  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  a

$$(\log z)' = 1/z \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Dôvodom, prečo sa vo Vete 23 uvažuje množina  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  a nie celý definičný obor  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  funkcie  $\log$ , je skutočnosť, že funkcia  $\arg$ , a následne, podľa (65), i funkcia  $\log$ , **nie sú spojité** na polpriamke  $(-\infty, 0)$  v  $\mathbb{C}$ . To znamená, že hlavná vetva logaritmu  $\log$  nemôže byť ani holomorfná na  $(-\infty, 0)$  (pozri Definícia 2 a Veta 6). Poznamenajme, že štandardné vlastnosti reálnych logaritmov platia v komplexnom obore iba pre funkciu  $\text{Log}$ , t.j., pre každé  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  máme

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2, \quad \text{Log}(z_1/z_2) = \text{Log } z_1 - \text{Log } z_2, \quad (66)$$

ale vo všeobecnosti  $\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$  a  $\log(z_1/z_2) \neq \log z_1 - \log z_2$ . Naproti tomu, platí klasická rovnosť  $\log 1 = 0$ , avšak

$$\text{Log } 1 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{teda} \quad \text{Log } 1 = 2\pi i \mathbb{Z}. \quad (67)$$

Tieto skutočnosti sú dôsledkom **mnohoznačnosti logaritmickej funkcie**  $\text{Log}$ , t.j., symbol  $\text{Log } z$  znamená istú množinu hodnôt, a nielen jednu konkrétnu hodnotu.

# Mocninová funkcia

Pre dané  $c \in \mathbb{C}$  definujeme funkciu  **$c$ -tá mocnina** komplexnej premennej  $z$  ako

$$z^c = e^{c \operatorname{Log} z}. \quad (68)$$

Definičným oborom mocninovej funkcie pre všeobecné komplexné  $c$  je množina  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Využitím formúl v (63) a (65) sa výraz v (68) dá vyjadriť v tvare

$$z^c = e^{c(\ln |z| + i \arg z + 2k\pi i)} = e^{c(\log z + 2k\pi i)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (69)$$

Funkcia  $z^c$  je preto vo všeobecnosti mnohoznačnou komplexnou funkciou. Pre jednotlivé celočíselné hodnoty  $k$  dostávame jej tzv. jednoznačné spojité vetvy. Jednoznačná vetva mocninovej funkcie v (69) odpovedajúca hodnote  $k = 0$  sa zvykne označovať ako **hlavná spojité vetva** funkcie  $z^c$ . Významnu triedu tvoria mocninové funkcie s reálnym racionálnym exponentom  $c$ , t.j., pre  $c = m/n$ , kde  $m \in \mathbb{Z}$  a  $n \in \mathbb{N}$ . V tomto prípade je funkcia  $z^c$  najviac  $n$ -značná a platí

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} \left[ \cos \left( \frac{m \arg z + 2mk\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{m \arg z + 2mk\pi}{n} \right) \right],$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (70)$$

- $n = 1$  – mocninová funkcia sa redukuje na polynóm ( $m \geq 0$ ), resp. na racionálnu lomenú funkciu ( $m < 0$ ). V tomto prípade máme jednoznačnú funkciu s hodnotou

$$z^m = |z|^m [\cos(m \arg z) + i \sin(m \arg z)], \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- $m = 1$  – jedná sa o  $n$ -tú odmocninu, zavedenú v (12). Mocninová funkcia je  $n$ -značná, definovaná v celej komplexnej rovine s hodnotami v (12).
- $m, n$  sú vzájomne nesúdeliteľné – mocninová funkcia je v tomto prípade práve  $n$ -značná, pričom pre dané nenulové komplexné číslo  $z_0$  hodnoty  $z_0^{m/n}$  ležia vo vrcholoch pravidelného  $n$ -uholníka vpísaného do kružnice so stredom v bode 0 a s polomerom  $|z_0|^{m/n}$ . Okrem toho platia identity

$$z^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{z})^m = \sqrt[n]{z^m} \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- $m, n$  majú netriviálneho spoločného deliteľa – v tomto prípade má funkcia  $z^{m/n}$  práve  $n/d$  jednoznačných spojitych vetiev, kde  $d$  označuje najväčší spoločný deliteľ čísel  $m$  a  $n$ . Ďalej platí  $z^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{z})^m$  pre každé nenulové  $z$ , avšak vo všeobecnosti  $z^{\frac{m}{n}} \neq \sqrt[n]{z^m}$ , ako to ilustujeme v Príklade 32.



## Veta 24

Nech  $m \in \mathbb{Z}$  a  $n \in \mathbb{N}$ . Každá jednoznačná vetva mocnovej funkcie  $z^{m/n}$  je holomorfná na množine  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  a platí

$$\left(z^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot \frac{z^{\frac{m}{n}}}{z} \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

V súlade s Vetou 24 potom hovoríme o **jednoznačných holomorfných vetvách** mnohoznačnej funkcie  $z^{m/n}$ .

## Príklad 26

Vypočítajme

$$e^{i\pi}, \quad e^{2+i\frac{\pi}{6}}.$$

Podľa Dôsledku 2(i) platí

$$e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0 \cos \pi + e^0 \sin \pi = -1,$$

$$e^{2+i\frac{\pi}{6}} = e^2 \cos(\pi/6) + i e^2 \sin(\pi/6) = \frac{e^2}{2} (\sqrt{3} + i).$$

## Príklad 27

Nájdime v  $\mathbb{C}$  všetky riešenia rovnice

$$\sin z = 2.$$

Nech  $z = x + iy$ . Potom podľa Vety 21(i) je rovnica v zadaní ekvivalentná s

$$\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y = 2 \iff \sin x \operatorname{ch} y = 2 \quad \wedge \quad \cos x \operatorname{sh} y = 0.$$

Z posledných dvoch rovníc vyplýva  $\cos x = 0$ , teda  $x = (2k + 1)\pi/2$  pre  $k \in \mathbb{Z}$ . Po dosadení do rovnice  $\sin x \operatorname{ch} y = 2$  dostaneme  $\operatorname{ch} y = \pm 2$ . Keďže reálna hyperbolická funkcia  $\operatorname{ch} y$  nadobúda len kladné hodnoty, platí  $\operatorname{ch} y = 2$ , a podľa (54) máme

$$e^y + e^{-y} = 4.$$

Táto transcendentná rovnica má práve dve riešenia  $y = \ln(2 \pm \sqrt{3})$ . Množina všetkých riešení rovnice v zadaní príkladu má teda tvar

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## Príklad 28

Dokážme rovnosť množín

$$\operatorname{Log}(1/z) = -\operatorname{Log} z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

a zároveň nájdime  $z$ , pre ktoré  $\log(1/z) \neq -\log z$ , resp.  $\log(1/z) = -\log z$ .  
Pre ľubovoľné  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  platia podľa (66) a (67) rovnosti množín

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(1/z) &= \operatorname{Log} 1 - \operatorname{Log} z = \{2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\} - \{\ln|z| + \arg z + 2l\pi i, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{-\ln|z| - \arg z + 2(k-l)\pi i, k, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= -\{\ln|z| + \arg z + 2m\pi i, m \in \mathbb{Z}\} = -\operatorname{Log} z. \end{aligned}$$

Napríklad pre  $z = -2 = -2 + i0$  pomocou (65) máme

$$\begin{aligned} \log(-1/2) &= \ln|-1/2| + i \arg(-1/2) = -\ln 2 - i\pi, \\ -\log(-2) &= -\ln|-2| - i \arg(-2) = -\ln 2 + i\pi. \end{aligned}$$

Teda  $\log(-1/2) \neq -\log(-2)$ . Naproti tomu, pre  $z = 1 + i$  dostaneme rovnosť

$$\begin{aligned} \log[1/(1+i)] &= \log[(1-i)/2] = \ln(1/\sqrt{2}) - i\pi/4, \\ -\log(1+i) &= -\ln\sqrt{2} - i\pi/4 = \ln(1/\sqrt{2}) - i\pi/4. \end{aligned}$$

### Poznámka 5 (k Príkladu 28)

Pozorovania v Príklade 28 majú svoje zovšeobecnenie. Konkrétne, dá sa ukázať, že pre každé nenulové komplexné číslo  $z$  platí

$$\log\left(\frac{1}{z}\right) = \begin{cases} -\log z - 2\pi i, & z \in (-\infty, 0), \\ -\log z, & z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Skutočne, ako sme zistili v Príklade 28, pre  $z = -2 \in (-\infty, 0)$  máme

$$-\log(-2) - 2\pi i = -\ln 2 + i\pi - 2\pi i = -\ln 2 - \pi i = \log(-1/2),$$

kým pre  $z = 1 + i \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  sme dostali  $\log[1/(1+i)] = -\log(1+i)$ .

**Príklad 29**

Vypočítajme

$$\text{a) } \log i, \quad \text{Log } i \quad \text{b) } \log (2 + 3i), \quad \text{Log } (2 + 3i).$$

a)

$$\log i = \ln |i| + i \arg i = \ln 1 + i\pi/2 = i\pi/2,$$

$$\text{Log } i = \{\log i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\} = \{i(\pi/2 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}.$$

b)

$$\log (2 + 3i) = \ln |2 + 3i| + i \arg (2 + 3i) = \ln \sqrt{13} + i \arctg (3/2),$$

$$\text{Log } (2 + 3i) = \{\log (2 + 3i) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\ln \sqrt{13} + i(\arctg (3/2) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}.$$

### Príklad 30

Stanovme

$$1^i, \quad i^i, \quad 1^{(1+i)/\sqrt{2}}.$$

V súlade s definíciami v (68) a (69) postupne dostaneme

$$1^i = e^{i \operatorname{Log} 1} = e^{i(\ln 1 + 2k\pi i)} = e^{-2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(\ln |i| + i\pi/2 + 2k\pi i)} = e^{i(i\pi/2 + 2k\pi i)} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} 1^{(1+i)/\sqrt{2}} &= e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} 1} = e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} (\ln 1 + 2k\pi i)} = e^{(-1+i)\sqrt{2}k\pi} = e^{-\sqrt{2}k\pi + i\sqrt{2}k\pi} \\ &= e^{-\sqrt{2}k\pi} \left[ \cos(\sqrt{2}k\pi) + i \sin(\sqrt{2}k\pi) \right], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

### Príklad 31

Porovnajme nasledujúce množiny

$$(-8)^{\frac{2}{3}}, \quad (\sqrt[3]{-8})^2, \quad \sqrt[3]{(-8)^2}.$$

Na všetky tri mocniny aplikujeme vzorec v (70). Podľa Príkladu 4 vieme, že  $|-8| = 8$  a  $\arg(-8) = -\pi$ . V prípade prvej mocniny je  $m = 2$  a  $n = 3$ , teda

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = 4 \left[ \cos \left( \frac{4k\pi - 2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{4k\pi - 2\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Celkovo máme tri hodnoty pre mocninu  $(-8)^{2/3}$ , a to

$$k = 0 \longrightarrow 4 [\cos(-2\pi/3) + i \sin(-2\pi/3)] = -2 - 2\sqrt{3}i,$$

$$k = 1 \longrightarrow 4 [\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)] = -2 + 2\sqrt{3}i,$$

$$k = 2 \longrightarrow 4 [\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)] = 4.$$

Pri zisťovaní hodnôt druhej mocniny  $(\sqrt[3]{-8})^2$  využijeme výsledky z Príkladu 4, pričom dostaneme

## Príklad 31

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 - i\sqrt{3}, \\ 1 + i\sqrt{3}, \\ -2, \end{cases} \implies (\sqrt[3]{-8})^2 = \begin{cases} -2 - 2\sqrt{3}i, \\ -2 + 2\sqrt{3}i, \\ 4. \end{cases}$$

Pre poslednú mocninu v zadaní príkladu platí  $\sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64}$ . Preto vo vzorci (70) dosadzujeme  $m = 1$ ,  $n = 3$ ,  $z = 64$ ,  $|z| = 64$  a  $\arg z = \arg(64) = 0$ , t.j.,

$$\sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4 \left[ \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Jednotlivé hodnoty pre  $\sqrt[3]{(-8)^2}$  potom sú

$$k = 0 \longrightarrow 4 [\cos 0 + i \sin 0] = 4,$$

$$k = 1 \longrightarrow 4 [\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)] = -2 + 2\sqrt{3}i,$$

$$k = 2 \longrightarrow 4 [\cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3)] = -2 - 2\sqrt{3}i.$$

Vo všetkých troch prípadoch sme dostali rovnakú množinu hodnôt mocnín. Tento výsledok je v súlade s diskusiou uvedenou vyššie, nakoľko čísla  $m = 2$  a  $n = 3$  sú vzájomne nesúdeliteľné.



## Príklad 32

Porovnajme nasledujúce množiny

$$(-4)^{\frac{2}{4}}, \quad (\sqrt[4]{-4})^2, \quad \sqrt[4]{(-4)^2}.$$

Na mocniny aplikujeme podobný postup ako v Príklade 31. Postupne dostaneme

$$(-4)^{\frac{2}{4}} = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} = \pm 2i,$$

$$\sqrt[4]{-4} = \begin{cases} 1 - i, \\ 1 + i, \\ -1 + i, \\ -1 - i, \end{cases} \implies (\sqrt[4]{-4})^2 = \begin{cases} -2i, \\ 2i, \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2, \\ 2i, \\ -2, \\ -2i. \end{cases}$$

Platí teda  $(-4)^{\frac{2}{4}} = (\sqrt[4]{-4})^2 \neq \sqrt[4]{(-4)^2}$ , nakoľko čísla  $m = 2$  a  $n = 4$  nie sú vzájomne nesúdeliteľné a majú netriviálneho spoločného deliteľa  $d = 2$ .

# L'Hospitalovo pravidlo v komplexnom obore

Podobne ako v reálnom obore, tak i v  $\mathbb{C}$  platí tzv. **L'Hospitalovo pravidlo**, ktoré umožňuje výpočet istého typu limit funkcií. Poznamenajme, že L'Hospitalovo pravidlo pre komplexné funkcie je **silnejšie tvrdenie** než jeho "reálna verzia". Je to spôsobené skutočnosťou, že pôvodný predpoklad reálnej diferencovateľnosti funkcií je teraz nahradený silnejším predpokladom **holomorfnosti** funkcií. Pre  $r \in \mathbb{R}^+$  a  $z_0 \in \mathbb{C}$  budeme pod pojmom **prstencové  $r$ -okolie** bodu  $z_0$  rozumieť množinu  $K^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < r\}$ . V prípade nevlastného bodu  $z_0 = \infty$  definujeme  $K^*(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1/r\}$ .

## Veta 25 (L'Hospitalovo pravidlo)

*Nech funkcie  $f$  a  $g$  sú holomorfné na prstencovom okolí  $K^*(z_0, r)$ ,  $r > 0$ , bodu  $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  a nech platí  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ , pričom  $g$  nie je identicky nulová funkcia. Potom existuje  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)/g(z))$  (vlastná, nevlastná) a platí*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

### Príklad 33

Určme limitu

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z}.$$

Zložená funkcia  $f(z) = \log(1+z)$  je podľa Vety 23 definovaná a holomorfná na  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ , kým funkcia  $g(z) = z$  je holomorfná v celej komplexnej rovine. Ďalej  $g \neq 0$  v  $\mathbb{C}$  a platí

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \log(1+z) = \log 1 = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z = 0.$$

Sú teda splnené všetky predpoklady Vety 25. Limita v zadaní príkladu existuje a

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{[\log(1+z)]'}{(z)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+z}}{1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1+z} = 1.$$

# Obsah

- 1 Komplexné čísla
- 2 Postupnosti, rady a funkcie
- 3 Komplexná derivácia a holomorfné funkcie
- 4 Elementárne funkcie
- 5 Komplexný integrál a Cauchyho teória**
- 6 Laurentov rad a teória rezíduí

# Komplexný krivkový integrál

Nech  $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$  je reálny interval a nech  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  je komplexná funkcia **reálnej premennej**  $t \in [\alpha, \beta]$ . Pre funkciu  $f$  sa definuje **derivácia**  $f'(t_0)$  v bode  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  vzťahom

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = [\operatorname{Re} f]'(t_0) + i [\operatorname{Im} f]'(t_0), \quad (71)$$

kde  $[\operatorname{Re} f]'(t_0)$ ,  $[\operatorname{Im} f]'(t_0)$  znamenajú (reálne) derivácie reálnych funkcií  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$  podľa premennej  $t$ . V prípade  $t_0 = \alpha$ , resp.  $t_0 = \beta$  uvažujeme **deriváciu sprava**, resp. **zľava**

$$f'_+(\alpha) = [\operatorname{Re} f]'_+(\alpha) + i [\operatorname{Im} f]'_+(\alpha), \quad \text{resp.} \quad f'_-(\beta) = [\operatorname{Re} f]'_-(\beta) + i [\operatorname{Im} f]'_-(\beta).$$

Ďalej definujeme **určitý integrál** komplexnej funkcie  $f$  reálnej premennej  $t$  na intervale  $[\alpha, \beta]$  zápisom

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} f(t) dt. \quad (72)$$

Pre počítanie s deriváciami a určitými integrálmi z komplexných funkcií reálnej premennej platia pravidlá analogické reálnemu oboru (substitúcia, per-partes).

### Príklad 34

Vypočítajme deriváciu a určitý integrál z funkcie

$$f(t) = e^{iat}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Využívajúc Dôsledok 2(i), oddelíme reálnu a imaginárnu časť funkcie  $f$

$$f(t) = e^{iat} = \cos at + i \sin at, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Potom podľa (71) a (72) postupne máme

$$f'(t) = -a \sin at + ia \cos at = ia e^{iat},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) dt &= \int_0^{2\pi} \cos at dt + i \int_0^{2\pi} \sin at dt \\ &= \left[ \frac{1}{a} \sin at \right]_0^{2\pi} + i \left[ -\frac{1}{a} \cos at \right]_0^{2\pi} = \left[ \frac{1}{ia} e^{iat} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{e^{2a\pi i} - 1}{ia}. \end{aligned}$$

### Poznámka 6

Poznamenajme, že výsledky v Príklade 34 sú analogické s tradičnými pravidlami pre deriváciu a neurčitý integrál exponenciálnej funkcie, t.j., pre  $a \in \mathbb{R}$  platí

$$\left(e^{iat}\right)' = ia \cdot e^{iat}, \quad \int e^{iat} dt = \frac{1}{ia} \cdot e^{iat}.$$

Ako sa možno ľahko presvedčiť, tieto vlastnosti exponenciálnej funkcie zostanú v platnosti i pre komplexnú hodnotu konštanty  $a$ . Konkrétne, platia rovnosti

$$\left(e^{at}\right)' = a \cdot e^{at}, \quad \int e^{at} dt = \frac{1}{a} \cdot e^{at} + K, \quad a \in \mathbb{C}, \quad (73)$$

kde  $K$  označuje komplexnú integračnú konštantu. Na druhej strane, nie všetky pravidlá platné v  $\mathbb{R}$  fungujú i pre komplexné funkcie reálnych premenných. V Príklade 35 demonštrujeme neplatnosť reálneho L'Hospitalovho pravidla.

## Príklad 35

Nech  $f(t) = t$  a  $g(t) = t e^{i/t}$  pre  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Potom platí  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$  a

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} [t \cos(1/t) + i t \sin(1/t)] = 0 + i0 = 0.$$

Ďalej, pre (reálne) derivácie funkcií  $f, g$  podľa premennej  $t$  máme  $f'(t) = 1$  a

$$\begin{aligned} g'(t) &= [t \cos(1/t)]' + i [t \sin(1/t)]' \\ &= \cos(1/t) + (1/t) \cdot \sin(1/t) + i [\sin(1/t) - (1/t) \cdot \cos(1/t)] \\ &= e^{i/t} (t - i)/t. \end{aligned}$$

Limita z podielu  $f'/g'$  v bode 0 existuje, pričom

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{e^{i/t} (t - i)/t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t e^{-i/t}}{t - i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos(1/t) - i t \sin(1/t)}{t - i} \\ &= \frac{0 + i0}{-i} = 0. \end{aligned}$$

Avšak limita  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)/g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-i/t}$  neexistuje, napriek tomu, že sú splnené všetky predpoklady reálneho L'Hospitalovho pravidla.



V teórii krivkového integrálu v  $\mathbb{R}^2$  sme rovinnú krivku definovali ako spojitě zobrazenie  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kde  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , t.j., ako spojitě zobrazenie reálneho intervalu do “reálnej” roviny. Nakoľko medzi rovinou  $\mathbb{R}^2$  a komplexnou rovinou  $\mathbb{C}$  existuje jednoznačná korešpondencia  $[x, y] \leftrightarrow x + iy$ , v nasledujúcom výklade budeme **krivkou v  $\mathbb{C}$**  rozumieť spojitú komplexnú funkciu reálnej premennej, t.j.,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Je zrejmé, že pre takto definovanú (komplexnú) krivku platia všetky pojmy a výsledky získané pre (reálne) krivky v  $\mathbb{R}^2$ . Obzvlášť, množinu

$$\langle \varphi \rangle = \{z \in \mathbb{C}, z = \varphi(t), t \in [a, b]\}$$

budeme nazývať **trajektóriu (geometrickým obrazom) krivky  $\varphi$** , kým samotné zobrazenie  $\varphi$  potom budeme označovať ako **parametrizáciu** množiny  $\langle \varphi \rangle$ . Pre jednoduchosť budeme komplexné krivky v  $\mathbb{C}$  a s nimi korešpondujúce reálne krivky v  $\mathbb{R}^2$  stotožňovať.

### Definícia 3 (Krivkový integrál z komplexnej funkcie)

Nech  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  je cesta a  $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  spojitá funkcia. Potom **krivkový integrál  $\int_{\varphi} f(z) dz$  z funkcie  $f$  po ceste  $\varphi$**  definujeme vzťahom

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (74)$$

Z predpisu (74) sa dá ľahko odvodiť súvislosť medzi krivkovým integrálom v  $\mathbb{C}$  a **krivkovým integrálom II. druhu** v  $\mathbb{R}^2$ . Konkrétne, ak  $u$  a  $v$  označujú reálnu a imaginárnu časť funkcie  $f$ , t.j.,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  pre  $z = x + iy \in \langle \varphi \rangle$ , potom platí formula

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_{\varphi} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{\varphi} [v(x, y) dx + u(x, y) dy]. \quad (75)$$

Komplexný integrál v (74) má mnohé analogické vlastnosti ako krivkový integrál II. druhu v  $\mathbb{R}$ . Obzvlášť, jeho hodnota sa tzv. **reparametrizáciou cesty**  $\varphi$  nemení (t.j., integrál v (74) nezávisí na výbere ekvivalentnej parametrizácie danej cesty  $\varphi$ ). Nasledovné tvrdenie objasňuje koncept **substitúcie** v komplexnom integrále.

### Veta 26 (Transformačné pravidlo)

*Nech  $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$  sú otvorené množiny a  $g : G_1 \rightarrow G_2$  je holomorfná funkcia. Nech  $\varphi_1$  je cesta v  $G_1$  a  $\varphi_2 = g \circ \varphi_1$ . Potom pre každú komplexnú funkciu  $f$  definovanú a spojitú na  $\langle \varphi_2 \rangle$  platí*

$$\int_{\varphi_2} f(z) dz = \int_{\varphi_1} f(g(w)) g'(w) dw. \quad (76)$$

Realizácia substitúcie pre komplexný integrál v (74) je podľa Vety 26 formálne analogická ako pri určitom (Riemannovom) integrále v  $\mathbb{R}$ . Postupne platí

$$\begin{array}{cc} \underbrace{z = g(w)} & \underbrace{\varphi_2(\cdot) = g(\varphi_1(\cdot))} \\ \text{transformácia integračnej premennej} & \text{transformácia "integračných medzí"} \\ \Downarrow & \\ dz = g'(w) dw & \\ \Downarrow & \\ \int_{\varphi_2} f(z) dz = \int_{\varphi_1} f(g(w)) g'(w) dw. & \end{array}$$

Poznamenajme, že  $g'(w)$  značí komplexnú deriváciu holomorfnej funkcie  $g$  v bode  $w \in \langle \varphi_1 \rangle$ .

**Veta 27**

Nech  $\varphi$  je cesta v  $\mathbb{C}$  a  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť komplexných funkcií spojitých na  $\langle\varphi\rangle$ . Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) Ak  $f$  je limitná funkcia postupnosti  $\{f_n\}$  a  $f_n \rightrightarrows f$  na  $\langle\varphi\rangle$ , potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\varphi} f_n(z) dz \right) = \int_{\varphi} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \right) dz = \int_{\varphi} f(z) dz.$$

(ii) Ak  $f$  je súčet radu  $\sum f_n$  a  $\sum f_n \rightrightarrows f$  na  $\langle\varphi\rangle$ , potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{\varphi} f_n(z) dz \right) = \int_{\varphi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \int_{\varphi} f(z) dz.$$

# Nezávislosť krivkového integrálu na integračnej ceste a primitívna funkcia

## Definícia 4 (Nezávislosť na integračnej ceste)

Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je otvorená množina a  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá funkcia. Hovoríme, že krivkový integrál  $\int_{\varphi} f(z) dz$  **nezávisí v  $G$  na integračnej ceste**, ak pre každé dve cesty  $\varphi_1, \varphi_2$  v  $G$  majúce spoločný začiatkový i koncový bod platí

$$\int_{\varphi_1} f(z) dz = \int_{\varphi_2} f(z) dz. \quad (77)$$

Ekvivalentne, krivkový integrál z funkcie  $f$  **nezávisí v  $G$  na integračnej ceste**, ak pre každú **uzavretú** cestu  $\varphi$  v  $G$  platí  $\int_{\varphi} f(z) dz = 0$ .

## Definícia 5 (Primitívna funkcia)

Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je otvorená množina a  $f$  je komplexná funkcia definovaná na  $G$ . Holomorfná funkcia  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  sa nazýva **primitívna** k funkcii  $f$  (v  $G$ ), ak platí

$$F'(z) = f(z) \quad \text{pre každé } z \in G. \quad (78)$$

### Veta 28 (Newtonova–Leibnizova formula)

Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je otvorená množina a nech  $f$  je komplexná funkcia spojitá na  $G$ . Potom  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  je primitívna funkcia k  $f$  v  $G$  práve vtedy, keď pre každú dvojicu  $z_1, z_2 \in G$  a každú cestu  $\varphi$  v  $G$  so začiatočným bodom  $z_1$  a koncovým bodom  $z_2$  platí

$$\int_{\varphi} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1). \quad (79)$$

### Dôsledok 3 (Existencia primitívnej funkcie)

Funkcia  $f$  spojitá na otvorenej množine  $G \subseteq \mathbb{C}$  má v  $G$  primitívnu funkciu práve vtedy, keď krivkový integrál  $\int_{\varphi} f(z) dz$  nezávisí v  $G$  na integračnej ceste.

### Poznámka 7

Ako vidno z Dôsledku 3, pojem primitívnej funkcie v  $\mathbb{C}$  je **silnejší** koncept než jeho klasická reálna analógia. Ak  $F$  je funkcia primitívna k  $f$  na  $G$ , potom pre každú konštantu  $K \in \mathbb{C}$  i funkcia  $F + K$  je primitívna k  $f$  na  $G$ . V prípade, ak  $G$  je **súvislá množina**, teda **oblasť**, platí i opačné tvrdenie, t.j., rozdiel dvoch funkcií, ktoré sú primitívne k  $f$  na  $G$ , je funkcia konštantná na  $G$ .

## Príklad 36

Vypočítajme krivkový integrál

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z} dz,$$

kde krivka  $\varphi$  je polkružnica  $z = R e^{it}$ ,  $R > 0$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Využijeme Definíciu 3 s

$$f(z) = 1/z, \quad \varphi(t) = R e^{it}, \quad t \in [0, \pi].$$

Podľa Poznámky 6 pre deriváciu krivky  $\varphi$  platí  $\varphi'(t) = R i e^{it}$  pre  $t \in [0, \pi]$ . Po dosadení do formuly (74) dostaneme

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{R e^{it}} \cdot R i e^{it} dt = i \int_0^{\pi} dt = i\pi.$$

Poznamenajme, že rovnaký výsledok dostaneme i použitím rovnosti (75), t.j., prevodom komplexného krivkového integrálu na dva (reálne) krivkové integrály II. druhu. V tomto prípade používame “reálnu” parametrizáciu krivky  $\varphi$

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad t \in [0, \pi],$$

keďže  $z = x + iy$  a podľa (13) platí  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ . Reálna a imaginárna

**Príklad 36**

časť funkcie  $f(z) = 1/z$  majú tvar

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$\Downarrow$$
$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

V súlade s (75) potom počítame dva reálne krivkové integrály

$$I_1 = \int_{\varphi} [u dx - v dy] = \int_{\varphi} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2},$$
$$I_2 = \int_{\varphi} [v dx + u dy] = \int_{\varphi} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

pričom hodnota integrálu v zadaní príkladu je  $I_1 + iI_2$ .



## Príklad 37

Dokážme, že pre pevné  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  a  $R > 0$  platí

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1, \end{cases} \quad (80)$$

kde  $\varphi$  je kružnica  $|z - z_0| = R$ . Jej parametrické vyjadrenie má zrejme tvar

$$z - z_0 = R e^{it} \implies z = z_0 + R e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Pre diferenciál  $dz$  potom platí  $dz = z'(t) dt = R i e^{it} dt$ . Integrál v zadaní má potom podľa (74) tvar

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} \cdot R i e^{it} dt = i R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Ak  $n \neq -1$ , pre posledný integrál pomocou (73) a (45) dostaneme

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^n dz = i R^{n+1} \left[ \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = i R^{n+1} \frac{e^{2\pi(n+1)i} - 1}{i(n+1)} \stackrel{(45)}{=} 0.$$

### Príklad 37

V prípade  $n = -1$  (t.j.,  $n + 1 = 0$ ) platí

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^{-1} dz = i \int_0^{2\pi} dt = i [t]_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

### Príklad 38

Pre pevné  $n \in \mathbb{Z}$  stanovme primitívnu funkciu  $k$

$$f(z) = z^n$$

na množine  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Pre  $n \neq -1$  je  $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$  funkciou primitívnou k  $f$  pre  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , nakoľko  $F$  je holomorfná na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  a  $F'(z) = f(z)$  pre  $z \neq 0$ . V prípade  $n = -1$ , t.j.,  $f(z) = 1/z$ , neexistuje primitívna funkcia k  $f$  na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Vyplýva to z Dôsledku 3 a z formuly (80) v Príklade 37 s  $z_0 = 0$ , podľa ktorej krivkový integrál z  $1/z$  pozdĺž (uzavretej) kružnice so stredom v bode 0 je nenulový. Naproti tomu, na množine  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  má funkcia  $f(z) = 1/z$  za primitívnu funkciu hlavnú vetvu logaritmu  $\log$ , nakoľko podľa Vety 23 platí

$$(\log z)' = 1/z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

# Cauchyho teória krivkového integrálu

V teórii funkcií komplexnej premennej má osobitný význam počítanie integrálov po **uzavretých** cestách (napr. Dôsledok 3). Základné výsledky o komplexných krivkových integráloch pozdĺž uzavretých ciest sa zvyčajne súhrne označujú ako tzv. **Cauchyho teória**. Ako uvidíme, významnú úlohu v tejto teórii zohrávajú funkcie, ktoré sú holomorfné na otvorených podmnožinách komplexnej roviny.

## Lema 1

*Nech  $\varphi$  je merateľná cesta v  $\mathbb{C}$  a  $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá funkcia. Potom platí  $\left| \int_{\varphi} f(z) dz \right| \leq ML(\varphi)$ , kde  $M = \sup_{z \in \langle \varphi \rangle} |f(z)|$  a  $L(\varphi)$  je dĺžka krivky  $\varphi$ .*

## Veta 29 (Cauchyho integrálna veta)

*Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je jednoducho súvislá oblasť a  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  funkcia holomorfná v  $G$ . Potom pre každú uzavretú cestu  $\varphi$  v  $G$  platí*

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 0.$$

### Dôkaz Vety 29.

Dôkaz vykonáme pre prípad, keď  $\varphi$  je Jordanova cesta (po častiach regulárna, jednoduchá a uzavretá krivka). Podľa formuly (75) platí

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_{\varphi} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{\varphi} [v(x, y) dx + u(x, y) dy],$$

kde  $u, v$  označujú reálnu a imaginárnu časť funkcie  $f$ , t.j.,  $f = u + iv$ . Keďže  $f$  je holomorfná v  $G$ , z Definície 2 a Vety 9 vyplýva, že reálne funkcie  $u$  a  $v$  sú (spojito) diferencovateľné v  $G$  a spĺňajú Cauchyho–Riemannove rovnosti

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y), \quad u'_y(x, y) = -v'_x(x, y), \quad [x, y] \in G. \quad (81)$$

Aplikovaním Greenovej integrálnej vety na dva vyššie uvedené (reálne) krivkové integrály II. druhu a s označením  $D := \text{Int } \varphi \cup \langle \varphi \rangle$  dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] &= \iint_D [-v'_x(x, y) - u'_y(x, y)] dx dy \\ &\stackrel{(81)}{=} \iint_D 0 dx dy = 0, \end{aligned}$$

**Dôkaz Vety 29 (pokračovanie).**

$$\int_{\varphi} [v(x, y) dx + u(x, y) dy] = \iint_D [u'_x(x, y) - v'_y(x, y)] dx dy$$
$$\stackrel{(81)}{=} \iint_D 0 dx dy = 0.$$

Z posledných dvoch rovností potom vyplýva  $\int_{\varphi} f(z) dz = 0 + i0 = 0$ . ■

Predpokladajúc **spojitosť** funkcie  $f$  v  $G$ , platí i obrátené tvrdenie ku Cauchyho integrálnej vete.

**Veta 30 (Moreroва veta)**

*Nech funkcia  $f$  je spojitá v otvorenej množine  $G \subseteq \mathbb{C}$  a nech krivkový integrál  $\int_{\varphi} f(z) dz$  nezávisí v  $G$  na integračnej ceste, t.j.,*

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 0 \quad \text{pre každú uzavretú cestu } \varphi \text{ v } G.$$

*Potom  $f$  je funkcia holomorfná v  $G$ .*

Nasledujúce vety majú význam pri samotnom počítaní hodnôt integrálov pozdĺž uzavretých kriviek. Za istých predpokladov umožňujú **zámenu integračnej cesty**, čím sa celý výpočet integrálu môže výrazne zjednodušiť.

### Veta 31 (Princíp deformácie krivky)

*Nech  $\varphi, \psi$  sú dve kladne orientované Jordanove cesty v  $\mathbb{C}$  také, že  $\langle \psi \rangle \subseteq \text{Int } \varphi$ . Nech  $f$  je funkcia holomorfná v  $\text{Ext } \psi \cap \text{Int } \varphi$  a spojitá a konečná na uzávere množiny  $\text{Ext } \psi \cap \text{Int } \varphi$ , t.j., na množine  $\overline{\text{Ext } \psi \cap \text{Int } \varphi}$ . Potom platí*

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_{\psi} f(z) dz.$$

### Veta 32 (Zovšeobecnený princíp deformácie krivky)

*Nech  $\varphi, \psi_j, j = 1, \dots, n$ , sú kladne orientované Jordanove cesty v  $\mathbb{C}$  také, že množiny  $\text{Int } \psi_j$  sú po dvoch disjunktné a  $\langle \psi_j \rangle \subseteq \text{Int } \varphi$  pre  $j = 1, \dots, n$ . Nech  $f$  je funkcia holomorfná v  $\text{Int } \varphi \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{\text{Int } \psi_j}$  a spojitá a konečná na uzávere  $\text{Int } \varphi \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{\text{Int } \psi_j}$ , t.j., na množine  $\overline{\text{Int } \varphi} \setminus \bigcup_{j=1}^n \text{Int } \psi_j$ . Potom platí*

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\psi_j} f(z) dz.$$

### Veta 33 (Cauchyho integrálna formula)

Nech  $\varphi$  je kladne orientovaná Jordanova cesta v  $\mathbb{C}$  a nech  $f : \overline{\text{Int}\varphi} \rightarrow \mathbb{C}$  je funkcia holomorfná v  $\text{Int}\varphi$  a spojitá a konečná na  $\overline{\text{Int}\varphi}$ . Potom platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{pre každé } z_0 \in \text{Int}\varphi.$$

### Veta 34 (Cauchyho integrálna formula pre $n$ -tú deriváciu)

Nech  $G \subseteq \mathbb{C}$  je jednoducho súvislá oblasť a  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  funkcia holomorfná v  $G$ . Potom pre každé  $n \in \mathbb{N}_0$  a pre každú kladne orientovanú Jordanovu cestu  $\varphi$  v  $\mathbb{C}$ , ležiacu v  $G$ , platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{pre každé } z_0 \in \text{Int}\varphi.$$

Vety 29, 31, 32, 33 a 34 predstavujú **základné nástroje** na praktické počítanie hodnôt niektorých typov komplexných krivkových integrálov pozdĺž uzavretých ciest. Neskôr, zavedením pojmu **rezíduum** funkcie, tieto techniky podstatne rozšírime.

# Vlastnosti holomorfných funkcií

Predchádzajúce výsledky Cauchyho teórie majú niekoľko významných dôsledkov v teórii holomorfných funkcií.

## Dôsledok 4 (Vety 29)

*Ku každej funkcii, ktorá je holomorfná v jednoducho súvislej oblasti  $G \subseteq \mathbb{C}$ , existuje funkcia primitívna v  $G$ .*

## Dôsledok 5 (Vety 34)

*Nech  $f$  je funkcia holomorfná v otvorenej množine  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Potom  $f$  má v  $G$  komplexné derivácie všetkých rádov, ktoré sú holomorfné v  $G$ .*

## Poznámka 8

Podľa Dôsledku 5 a Definície 2 teda z existencie prvej komplexnej derivácie na otvorenej množine vyplýva i existencia všetkých komplexných derivácií na tejto množine. V reálnej analýze podobné tvrdenie rozhodne neplatí.



# Celé funkcie

## Definícia 6 (Celá funkcia)

Funkcia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sa nazýva **celá**, ak je holomorfná v celej komplexnej rovine.

## Poznámka 9

Príkladom celých funkcií sú **polynómy** v  $\mathbb{C}$ . Celé funkcie, ktoré nie sú polynómy, sa označujú ako **celé transcendentné** funkcie. Exponenciálna funkcia  $e^z$ , resp. goniometrické funkcie  $\sin z$  a  $\cos z$  alebo hypebolické funkcie  $\operatorname{sh} z$  a  $\operatorname{ch} z$  sú celé transcendentné funkcie.

## Veta 35

*Nech  $f$  je celá funkcia a  $n \in \mathbb{N}$ . Potom  $f$  je polynóm stupňa menšieho ako  $n$  práve vtedy, keď platí  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z^n = 0$ .*

## Veta 36 (Liouvilleova)

*Celá funkcia je ohraničená na celom  $\mathbb{C}$  práve vtedy, keď je konštantná v  $\mathbb{C}$ .*

### Dôkaz Vety 36.

Nech  $f$  je celá funkcia, ktorá je ohraničená na  $\mathbb{C}$ , t.j., existuje  $K \in \mathbb{R}^+$  také, že  $|f(z)| \leq K$  pre každé  $z \in \mathbb{C}$ . Potom platí

$$0 \leq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{K}{|z|} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0, \quad \text{teda} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = 0.$$

Posledná limita je ekvivalentná s  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z = 0$ . Funkcia  $f$  je preto podľa Vety 35 polynóm stupňa menšieho ako 1, teda konštantná v celom  $\mathbb{C}$ . Opačná implikácia platí triviálne. ■

### Veta 37 (Malá Picardova veta)

*Obor hodnôt každej nekonštantnej celej funkcie je celé  $\mathbb{C}$  s výnimkou nanajvyš jednej hodnoty.*

### Poznámka 10

Malá Picardova veta je zosilnenie Liouvilleovej vety 36. Napríklad celá funkcia  $e^z$  nadobúda všetky komplexné hodnoty okrem hodnoty 0, kým goniometrické funkcie  $\sin z$  a  $\cos z$  majú za obor hodnôt celú komplexnú rovinu.

# Komplexný Taylorov rad

## Veta 38 (Taylorova veta)

Nech funkcia  $f$  je pre dané  $z_0 \in \mathbb{C}$  a  $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  definovaná a holomorfná na otvorenom kruhu  $K(z_0, R)$ . Potom platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{pre každé } z \in K(z_0, R). \quad (82)$$

Vyjadrenie v (82) sa označuje ako **Taylorov rozvoj** funkcie  $f$  v okolí bodu  $z_0$ , pričom mocninový rad na pravej strane danej formuly sa nazýva **Taylorov rad** funkcie  $f$  **so stredom v bode**  $z_0$ .

## Poznámka 11

Taylorov rozvoj funkcie  $f$  v okolí bodu  $z_0$  je, ako rozvoj do mocninového radu v okolí  $z_0$ , určený **jednoznačne**. To znamená, že **každý mocninový rad** so stredom v bode  $z_0$ , **ktorý má** za svoj **súčet** funkciu  $f$ , je **Taylorovým radom** funkcie  $f$  na príslušnom konvergenčnom kruhu. Toto pozorovanie má svoje uplatnenie najmä pri praktickom hľadaní mocninových rozvojev komplexných funkcií (Príklad 44).

### Veta 39

*Nech funkcia  $f$  je definovaná na oblasti  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Potom  $f$  je holomorfná v  $G$  práve vtedy, keď je v okolí každého bodu  $z_0 \in G$  rozvinuteľná do mocninového radu.*

### Veta 40

*Funkcia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je celá práve vtedy, keď je v okolí každého bodu  $z_0 \in \mathbb{C}$  rozvinuteľná do mocninového radu, ktorý konverguje v celej komplexnej rovine.*

### Príklad 39

Vypočítajme krivkový integrál

$$\int_{\varphi} (z + 1/z) dz$$

pozdĺž kružnice  $\varphi$  s predpisom  $|z - 2| = 1$ . Funkcia  $f(z) = z + 1/z$  je zrejme holomorfná v jednoducho súvislej oblasti  $G = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ . A nakoľko  $\varphi$  je uzavretá cesta s  $\langle \varphi \rangle \subseteq G$ , podľa Cauchyho integrálnej vety 29 je integrál v zadaní príkladu rovný 0.

## Príklad 40

Určme krivkový integrál

$$I = \int_{\varphi} (z + 1/z) dz,$$

kde  $\varphi$  je kladne orientovaný obvod štvorca s vrcholmi v bodoch  $2 + 2i$ ,  $-2 + 2i$ ,  $-2 - 2i$  a  $2 - 2i$ . Ukážeme tri spôsoby riešenia tohto príkladu.

a) **Deformácia krivky, Cauchyho integrálna veta:** Nech  $\psi$  je kladne orientovaná kružnica s predpisom  $|z| = 1$ . Nie je ťažké overiť, že pre krivky  $\varphi$ ,  $\psi$  a funkciu  $f(z) = z + 1/z$  sú splnené predpoklady Vety 31. Preto máme

$$I = \int_{\psi} (z + 1/z) dz = \int_{\psi} z dz + \int_{\psi} (1/z) dz.$$

Nakoľko funkcia  $g(z) = z$  je holomorfná na  $\text{Int } \psi$ , integrál  $\int_{\psi} z dz = 0$ , podľa Cauchyho integrálnej vety 29. Z Príkladu 37 zas vieme, že  $\int_{\psi} (1/z) dz = 2\pi i$ . Preto hodnota integrálu v zadaní príkladu je  $I = 0 + 2\pi i = 2\pi i$ .

b) **Cauchyho integrálna formula:** Integrál v zadaní príkladu upravíme na tvar

$$I = \int_{\varphi} \frac{z^2 + 1}{z} dz.$$

### Príklad 40

Funkcia  $f(z) = z^2 + 1$  je iste holomorfná v  $\text{Int } \varphi$ , spojitá a konečná na  $\overline{\text{Int } \varphi}$ , a  $z_0 = 0 \in \text{Int } \varphi$ . V súlade s Vetou 33 potom platí

$$I = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

c) **Priamy výpočet krivkového integrálu:** Po častiach hladká Jordanova krivka  $\varphi$  pozostáva zo 4 orientovaných úsečiek

$$\varphi_1(t) = 2t - 2i, \quad \varphi_2(t) = 2 + 2it, \quad \varphi_3(t) = -2t + 2i, \quad \varphi_4(t) = -2 - 2it,$$

kde  $t \in [-1, 1]$ . Integrál v zadaní príkladu má teda vyjadrenie

$$I = \int_{\varphi_1} (z + 1/z) dz + \int_{\varphi_2} (z + 1/z) dz + \int_{\varphi_3} (z + 1/z) dz + \int_{\varphi_4} (z + 1/z) dz.$$

Pomocou rovnosti (74) v Definícii 3 postupne dostaneme

$$\int_{\varphi_1} (z + 1/z) dz = \int_{-1}^1 \left( 2t - 2i + \frac{1}{2t - 2i} \right) \cdot 2 dt = \int_{-1}^1 \left( 4t - 4i + \frac{1}{t - i} \right) dt,$$

## Príklad 40

$$\int_{\varphi_2} (z + 1/z) dz = \int_{-1}^1 \left( 2 + 2it + \frac{1}{2 + 2it} \right) \cdot 2i dt = \int_{-1}^1 \left( 4i - 4t + \frac{1}{t - i} \right) dt,$$

$$\int_{\varphi_3} (z + 1/z) dz = \int_{-1}^1 \left( 2i - 2t + \frac{1}{2i - 2t} \right) (-2) dt = \int_{-1}^1 \left( 4t - 4i + \frac{1}{t - i} \right) dt,$$

$$\int_{\varphi_4} (z + 1/z) dz = \int_{-1}^1 \left( -2 - 2it - \frac{1}{2 + 2it} \right) (-2i) dt = \int_{-1}^1 \left( 4i - 4t + \frac{1}{t - i} \right) dt.$$

Pre integrál  $I$  teda platí

$$I = 4 \int_{-1}^1 \frac{1}{t - i} dt = 4 \int_{-1}^1 \frac{t + i}{(t - i)(t + i)} dt = \int_{-1}^1 \frac{4t}{t^2 + 1} dt + i \int_{-1}^1 \frac{4}{t^2 + 1} dt.$$

Reálna časť z  $I$  je nulová, nakoľko integrand  $4t/(t^2 + 1)$  je nepárna funkcia v argumente  $t$ . Preto, v súlade s predchádzajúcimi dvoma postupmi, dostaneme

$$I = i \int_{-1}^1 \frac{4}{t^2 + 1} dt = i [4 \operatorname{arctg} t]_{-1}^1 = 2\pi i.$$

## Príklad 41

Vypočítajme krivkový integrál

$$I = \int_{\varphi} \frac{\sin(\pi z/4)}{z^2 - 1} dz$$

pozdĺž kladne orientovanej kružnice  $\varphi$  s vyjadrením  $z(t) = 2e^{it}$ , kde  $t \in [0, 2\pi]$ . Funkcia pod integrálom je holomorfná všade v danom otvorenom kruhu okrem bodov  $z = \pm 1$ , ako vyplýva z rozkladu  $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$ . Príklad možno riešiť dvoma prístupmi (samozrejme, okrem priameho výpočtu :-)).

a) **Deformácia krivky, Cauchyho integrálna formula:** Nech  $\psi_1, \psi_2$  sú dve kladne orientované kružnice s vyjadreniami

$$\psi_1 : |z - 1| = 1/2, \quad \psi_2 : |z + 1| = 1/2.$$

Ľahko sa presvedčíme, že pre krivky  $\varphi, \psi_1$  a  $\psi_2$  a funkciu pod integrálom v zadaní príkladu sú splnené všetky predpoklady Vety 32. Preto pre  $I$  máme

$$I = \int_{\psi_1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} dz + \int_{\psi_2} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} dz = \int_{\psi_1} \frac{\sin(\pi z/4)}{z - 1} dz + \int_{\psi_2} \frac{\sin(\pi z/4)}{z + 1} dz.$$



## Príklad 41

Funkcia  $\sin(\pi z/4)/(z+1)$  je holomorfná v  $\text{Int } \psi_1$  a funkcia  $\sin(\pi z/4)/(z-1)$  je holomorfná v  $\text{Int } \psi_2$ . Aplikovaním Cauchyho integrálnej formuly vo Vete 33 na posledné dva integrály dostaneme

$$I = 2\pi i \left[ \frac{\sin(\pi z/4)}{z+1} \right]_{z=1} + 2\pi i \left[ \frac{\sin(\pi z/4)}{z-1} \right]_{z=-1} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}} + \frac{\pi i}{\sqrt{2}} = \pi i \sqrt{2}.$$

b) **Rozklad na parciálne zlomky, Cauchyho integrálna formula:** Racionálnu lomenú funkciu  $1/(z^2-1)$  rozložíme na parciálne zlomky. Dostaneme

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}.$$

Dosadením do integrálu  $I$  v zadaní príkladu máme

$$I = \int_{\varphi} \left( \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right) dz = \frac{1}{2} \int_{\varphi} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} dz - \frac{1}{2} \int_{\varphi} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz.$$

Keďže funkcia  $\sin(\pi z/4)$  je holomorfná v  $\text{Int } \varphi$ , podľa Vety 33 platí

$$I = \pi i [\sin(\pi z/4)]_{z=1} - \pi i [\sin(\pi z/4)]_{z=-1} = \pi i / \sqrt{2} + \pi i / \sqrt{2} = \pi i \sqrt{2}.$$

## Príklad 42

Stanovme integrál

$$I = \int_{\varphi} \frac{ze^z}{(z + 2 - \pi i)^3} dz,$$

kde  $\varphi$  je kladne orientovaná kružnica so stredom v bode  $\pi i - 2$  a polomerom 1. Funkcia  $f(z) = ze^z$  je holomorfná v celej komplexnej rovine. Integrál  $I$  má tvar  $I = \int_{\varphi} \frac{ze^z}{(z - [\pi i - 2])^3} dz$ , pričom bod  $z_0 = \pi i - 2 \in \text{Int } \varphi$ . Podľa Vety 34 pre  $n = 2$  potom platí

$$I = (2\pi i / 2!) \cdot f''(z_0) = \pi i (ze^z)''|_{z=\pi i - 2}.$$

Elementárnym derivovaním dostaneme  $(ze^z)'' = e^z(z + 2)$ , a teda hodnota integrálu v zadaní príkladu je  $I = \pi i e^{\pi i - 2} \pi i = (\pi/e)^2$ .

## Poznámka 12

Poznamenajme, že v Príkladoch 41 a 42 by **priamy výpočet** integrálov, t.j., podľa Definície 3, bol **veľmi obtiažny**, ak nie celkom **nemožný**.

**Príklad 43**

Určme Taylorov rad funkcie  $f(z) = \log(1+z)$  so stredom v  $z_0 = 0$ . Funkcia  $f$  je podľa Vety 23 definovaná a holomorfná v otvorenom kruhu  $K(0, 1)$ . Podľa Vety 38 potom vieme, že hľadaný rad existuje a v súlade s (82) má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad z \in K(0, 1).$$

Postupným výpočtom zistíme

$$f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Preto platí (Taylorov) rozvoj

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots, \quad z \in K(0, 1).$$

**Príklad 44**

Rozviňme funkciu  $f(z) = 1/(3 - z)$  do mocninového radu

a) v okolí bodu  $z_0 = 0$ ,      b) v okolí bodu  $z_0 = -1 + 3i$ .

a) Predpis pre funkciu  $f$  vhodne upravíme

$$f(z) = \frac{1}{3 - z} = \frac{1}{3(1 - z/3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1 - z/3)}.$$

Zlomok  $1/[1 - (z/3)]$  je však pre  $|z/3| < 1$  súčtom nekonečného geometrického radu s prvým členom 1 a s kvocientom  $z/3$ , t.j.,

$$\frac{1}{1 - z/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \quad \text{pre každé } |z| < 3.$$

Preto pre funkciu  $f$  platí mocninový rozvoj

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n, \quad |z| < 3.$$

### Príklad 44

Posledná rovnosť zároveň predstavuje, v súlade s Poznámkou 11, Taylorov rozvoj funkcie  $f$  v okolí bodu 0, platný na otvorenom kruhu  $K(0, 3)$ .

b) Funkciu  $f$  opäť vhodne upravíme a rozvineme do geometrického radu

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3-z} = \frac{1}{4-3i-(z+1-3i)} = \frac{1}{(4-3i)\left(1-\frac{z+1-3i}{4-3i}\right)} \\ &= \frac{1}{4-3i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1-3i}{4-3i}} = \frac{1}{4-3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1-3i}{4-3i}\right)^n, \quad \left|\frac{z+1-3i}{4-3i}\right| < 1. \end{aligned}$$

Posledná podmienka konvergencie kladená na  $z$  je ekvivalentná s

$$|z+1-3i| < |4-3i| = 5, \quad \text{a teda} \quad z \in K(-1+3i, 5).$$

Pre funkciu  $f$  sme našli mocninový rozvoj tvaru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4-3i)^{n+1}} (z+1-3i)^n,$$

platný na otvorenom kruhu  $K(-1+3i, 5)$ . Zároveň je to i Taylorov rozvoj  $f$  v okolí bodu  $-1+3i$ .

# Obsah

- 1 Komplexné čísla
- 2 Postupnosti, rady a funkcie
- 3 Komplexná derivácia a holomorfné funkcie
- 4 Elementárne funkcie
- 5 Komplexný integrál a Cauchyho teória
- 6 Laurentov rad a teória rezíduí**

# Laurentov rad

Nech  $z_0, a_n, n \in \mathbb{Z}$ , sú pevne dané komplexné čísla. Súčet funkcionálnych radov

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (83)$$

nazývame **Laurentov rad so stredom v bode  $z_0$**  a s koeficientami  $a_n$  a značíme ho symbolom  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ , prípadne  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ . Mocninový rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  sa nazýva **regulárna časť** Laurentovho radu (83), kým rad  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$  sa označuje ako jeho **hlavná časť**. Hovoríme, že rad (83) **konverguje** v bode  $z \in \mathbb{C}$ , ak v  $z$  konverguje jeho regulárna i hlavná časť. Dá sa ukázať, že pre každý rad (83) existuje práve jedna dvojica  $0 \leq r, R \leq \infty$  taká, že rad (83) **konverguje** v medzikruží

$$P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z - z_0| < R\}$$

a **diverguje** pre  $|z - z_0| < r$  a  $|z - z_0| > R$ . Ak  $r > R$ , potom rad (83) zrejme diverguje v celej komplexnej rovine. Pokiaľ  $r = R$ , rad (83) môže konvergovať maximálne v bodoch kružnice  $|z - z_0| = r$ . Pre  $r < R$  je množina  $P(z_0, r, R)$  neprázdna a nazýva sa **medzikružie konverencie** radu (83). Poznamenajme, že rad (83) môže konvergovať i v istých bodoch kružníc  $|z - z_0| = r, |z - z_0| = R$ .

**Veta 41**

*Nech Laurentov rad (83) má neprázdne medzikružie konvergence  $P(z_0, r, R)$ . Potom tento rad konverguje absolútne a skoro rovnomerne v  $P(z_0, r, R)$ . Jeho súčet  $f$  je funkcia holomorfná v  $P(z_0, r, R)$  a platí*

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n \quad \text{pre každé } z \in P(z_0, r, R). \quad (84)$$

**Veta 42 (Laurentova)**

*Nech  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq r < R \leq \infty$ , a nech  $f$  je funkcia holomorfná v  $P(z_0, r, R)$ . Potom existuje Laurentov rad  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  s medzikružím konvergence  $P(z_0, r, R)$  a so súčtom  $f$  (na  $P(z_0, r, R)$ ). Navyiac, pre koeficienty  $a_n$  platí*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{Z}, \quad (85)$$

*kde  $\varphi$  je ľubovoľná kladne orientovaná kružnica  $|z-z_0| = \varrho$  s  $r < \varrho < R$ .*



## Poznámka 13

**Laurentov rozvoj** funkcie  $f$  na medzikruží  $P(z_0, r, R)$  v Laurentovej vete 42 je určený **jednoznačne**. Inými slovami, **každý rad** (83) s medzikružím konvergence  $P(z_0, r, R)$ , **ktorý má** za svoj **súčet** funkciu  $f$ , je **Laurentov rad** pre funkciu  $f$  na  $P(z_0, r, R)$  a jeho koeficienty  $a_n$  majú tvar (85) (tzv. **Laurentove koeficienty** funkcie  $f$  v  $P(z_0, r, R)$ ). Poznamenajme, že Taylorov rozvoj funkcie  $f$  v okolí bodu  $z_0$  je špeciálny prípad Laurentovho rozvoja  $f$  na medzikruží  $P(z_0, 0, R)$ .

Obzvlášť dôležitý je Laurentov rozvoj funkcie  $f$  na medzikruží typu  $P(z_0, 0, R)$ , teda na **prstencovom okolí**  $K^*(z_0, R)$  bodu  $z_0$ . V takomto prípade hovoríme o **Laurentovom rozvoji** funkcie  $f$  **v okolí bodu**  $z_0$ . Pripomeňme, že podľa Vety 42 požadujeme, aby funkcia  $f$  bola holomorfná na množine  $K^*(z_0, R)$ , avšak nie nutne v samotnom bode  $z_0$  (pozri Definíciu 2).

Laurentov rad funkcie  $f$  je možné definovať i so stredom v **nevlastnom bode**  $\infty$ . Ak funkcia  $g(z) = f(1/z)$  je holomorfná na nejakom medzikruží so stredom v  $z_0 = 0$ , t.j., v  $P(0, r, R)$  s  $0 \leq r < R \leq \infty$ , potom je možné podľa Laurentovej vety 42 rozvinúť funkciu  $g(z)$  do Laurentovho radu v medzikruží  $P(0, r, R)$

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \quad z \in P(0, r, R). \quad (86)$$

Rad v (86) potom označujeme ako **Laurentov rad funkcie  $f$  so stredom v bode  $\infty$** . Nakoľko  $g(z) = f(1/z)$ , rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$  je jeho **regulárna časť**, kým rad  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$  sa chápe ako jeho **hlavná časť**. Viac to osvetlíme na Príkľade 49.

### Príklad 45

Nájďme Laurentov rad so stredom  $z_0 = 0$  funkcie  $f(z) = 1/z$ . Funkcia  $f$  je holomorfná v každom prstencovom okolí  $K^*(0, R)$ ,  $R > 0$ . Preto podľa Vety 42 a Poznámky 13 pre každé  $R > 0$  existuje jediný Laurentov rad (83) funkcie  $f$  v  $P(0, 0, R) = K^*(0, R)$  s koeficientami

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1/z}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} z^{-(n+2)} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde  $\varphi$  je ľubovoľná kružnica  $|z| = \rho$  s  $0 < \rho < R$ . Z Príkladu 37 (pre  $z_0 = 0$ ) však vyplýva, že  $a_{-1} = 1$  a  $a_n = 0$  pre  $n \neq -1$  pre každé  $\rho > 0$  **nezávisle na výbere hodnoty  $R$** . To znamená, že dokonca existuje jediný Laurentov rozvoj funkcie  $f$  **platný na každom** prstencovom okolí  $P(0, 0, R)$  bodu  $z_0 = 0$ . Teda

$$f(z) = z^{-1} \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Poznamenajme, že tento výsledok vyplýva ihneď zo zadania príkladu, nakoľko samotná funkcia  $f$  má už tvar Laurentovho radu (83) so stredom v  $z_0 = 0$ .

## Príklad 46

Určme Laurentov rad so stredom  $z_0 = 0$  funkcie  $f(z) = \sin^2 z$ . Keďže funkcia  $f$  je holomorfná v celom  $\mathbb{C}$ , v súlade s Laurentovou vetou 42, Poznámkou 13 a úvahami v predchádzajúcom príklade, existuje jediný hľadaný Laurentov rad platný všade v  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Stačí teda nájsť **akýkoľvek** rozvoj typu (83) pre funkciu  $f$  v okolí bodu  $z_0 = 0$ . Z definície funkcie  $\sin z$  v (48) máme

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C}.$$

Pre funkciu  $f(z) = \sin^2 z$  potom platí

$$\begin{aligned} f(z) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} \right) \\ &= \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = z^2 - \frac{1}{6} z^4 + \frac{2}{45} z^6 + \dots \end{aligned}$$

Poznamenajme, že získaný Laurentov rozvoj má nulovú hlavnú časť. Je to teda Taylorov rozvoj funkcie  $f$  v okolí bodu  $z_0 = 0$  platiaci na celom  $\mathbb{C}$ , dokonca i v bode  $z_0 = 0$ .

## Príklad 47

Stanovme Laurentov rozvoj funkcie

$$f(z) = \frac{1}{(e^z - 1) \sin z}$$

na nejakom medzikruží so stredom v bode  $z_0 = 0$ . Ľahko sa presvedčíme, že funkcia  $f$  je holomorfná napríklad na medzikruží  $P(0, \pi, 2\pi)$ , kde platia rozvoje

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

$$(e^z - 1) \sin z = \left( z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \right) \left( z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{z^5}{24} + \dots$$

Pre funkciu  $f(z) = 1/[(e^z - 1) \sin z]$  potom na  $P(0, \pi, 2\pi)$  platí

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z^3/2 - z^5/24 + \dots} = z^{-2} - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} z + \frac{1}{48} z^2 + \dots$$

Všimnime si, že hlavná časť získaného Laurentovho radu funkcie  $f$  obsahuje len konečne veľa nenulových členov, nakoľko  $a_{-1} = -1/2$ ,  $a_{-2} = 1$  a  $a_{-n} = 0$  pre každé prirodzené  $n \geq 3$ .

## Príklad 48

Rozviňme funkciu

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

do Laurentovho radu so stredom  $z_0 = 0$  na vhodnom medzikruží. Funkcia  $f$  je holomorfná na medzikružiach  $P(0, 0, 1)$ ,  $P(0, 1, 2)$  a  $P(0, 2, \infty)$ , pričom platí

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}.$$

Každý prípad medzikružia vyriešime osobitne.

a) **Medzikružie  $P(0, 0, 1)$ :** Keďže  $0 < |z| < 1$ , platia mocninové rozvoje

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots \right] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n.$$

Poznamenajme, že druhý mocninový rozvoj konverguje pre  $|z| < 2$ . Funkcia  $f$  má potom v  $P(0, 0, 1)$  (podľa Poznámky 13 jediný) Laurentov rozvoj

## Príklad 48

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \right) z^n.$$

Jedná sa teda o Taylorov rozvoj funkcie  $f$  v okolí 0, nakoľko  $f$  je holomorfná i v bode  $z_0 = 0$ .

b) **Medzikružie  $P(0, 1, 2)$** : V tomto prípade  $1 < |z| < 2$ , preto výraz  $1/(1 - z)$  rozvineme do mocnín premennej  $z$  nasledovným spôsobom

$$\frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - 1/z} = -\frac{1}{z} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots \right] = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}.$$

Zlomok  $1/(z - 2)$  má rovnaký rozvoj ako v prípade a). Príslušný Laurentov rad funkcie  $f$  má potom tvar

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \quad \text{pre každé } z \in P(0, 1, 2).$$

c) **Medzikružie  $P(0, 2, \infty)$** : Teraz máme  $|z| > 2$ , a preto funkcia  $1/(1 - z)$  má rovnaký rozvoj ako v b). Na druhej strane, pre výraz  $1/(z - 2)$  platí

## Príklad 48

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z} \cdot \left[ 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots \right] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n}.$$

To znamená, že funkcia  $f$  má v medzikruží  $P(0, 2, \infty)$  jediný Laurentov rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n}.$$

Tento Laurentov rozvoj má iba hlavnú časť, jeho regulárna časť je nulová.

## Príklad 49

Nájdime Laurentove rady funkcie  $f$  z Príkladu 48 so stredom  $z_0 = \infty$ . V súlade s vyššie uvedenou definíciou sa jedná o Laurentove rozvoje funkcie  $f(1/z)$  so stredom v bode 0, pričom vo výsledných formulách zameníme premennú  $z$  za  $1/z$ . Ľahko sa ukáže, že takto získaný rozvoj funkcie  $f$  (so stredom  $z_0 = \infty$ ) je totožný s Laurentovým rozvojom funkcie  $f$  so stredom v bode 0 v príslušnom medzikruží konvergencie. Konkrétne, v Príklade 48 sme našli Laurentov rozvoj funkcie  $f$  pre  $0 < |z| < 1$ . Tento rozvoj je možné potom interpretovať ako Laurentov rozvoj  $f$  so stredom v  $\infty$  pri zamenenom označení jeho častí, t.j.,

## Príklad 49

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \right) z^n = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{regulárna časť rozvoja}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \right) z^n}_{\text{hlavná časť rozvoja}}.$$

Podobne, pre  $1 < |z| < 2$  z predchádzajúceho príkladu a s novou interpretáciou dostaneme Laurentov rozvoj funkcie  $f$  so stredom v bode  $\infty$

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \underbrace{\left[ -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \right]}_{\text{regulárna časť rozvoja}} + \underbrace{\left[ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \right]}_{\text{hlavná časť rozvoja}}.$$

V prípade  $2 < |z|$  máme nasledovný Laurentov rozvoj funkcie  $f$  v okolí  $\infty$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n}.$$

V aktuálnej interpretácii má tento rozvoj iba regulárnu časť, jeho hlavná časť je nulová.



# Izolované singularity komplexných funkcií

Nech  $f$  je komplexná funkcia. Bod  $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  sa nazýva **izolovanou singularitou** (**izolovaným singulárnym bodom**) funkcie  $f$ , ak  $f$  je holomorfná na nejakom prstencovom okolí  $K^*(z_0, R)$  bodu  $z_0$ , avšak nie je holomorfná v samotnom  $z_0$ . Potom, podľa Vety 42, existuje Laurentov rozvoj (83) funkcie  $f$  v okolí bodu  $z_0$  (presnejšie, v medzikruží  $K^*(z_0, R)$ ). Ak hlavná časť tohto radu je nulová, t.j.,  $a_{-n} = 0$  pre každé  $n \in \mathbb{N}$ , potom  $z_0$  je **odstrániteľná singularita** funkcie  $f$ . V prípade, ak hlavná časť radu (83) má len konečne veľa nenulových členov, t.j., existuje  $k \in \mathbb{N}$  tak, že  $a_{-k} \neq 0$  a  $a_{-n} = 0$  pre každé prirodzené  $n > k$ , potom bod  $z_0$  sa označuje ako **pól rádu  $k$** . Nakoniec, izolovanú singularitu  $z_0$  funkcie  $f$  nazývame **podstatnou**, ak hlavná časť Laurentovho radu (83) má nekonečne veľa nenulových členov. Póly a podstatné singularity sa súhrne označujú ako **neodstrániteľné singularity**.

## Veta 43 (Liouvilleova)

*Celá funkcia je holomorfná v bode  $\infty$ , resp. má v  $\infty$  odstrániteľnú singularitu práve vtedy, keď je konštantná v  $\mathbb{C}$ .*

## Dôsledok 6

*Každá nekonštantná celá funkcia má v bode  $\infty$  pól alebo podstatnú singularitu.*

## Poznámka 14

Nie je ťažké ukázať, že polynóm stupňa  $m \geq 1$  má v nevlastnom bode  $\infty$  pól rádu  $m$ . Naproti tomu celé transcendentné funkcie  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$  a  $\operatorname{ch} z$  majú v bode  $\infty$  podstatnú singularitu.

## Veta 44 (Veľká Picardova veta)

*Nech komplexná funkcia  $f$  má v bode  $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  podstatnú singularitu. Potom v každom prstencovom okolí bodu  $z_0$  nadobúda  $f$  všetky konečné komplexné hodnoty s výnimkou nanajvyš jednej.*

## Poznámka 15

Funkcia  $f(z) = e^{1/z}$  má v bode  $z_0 = 0$  podstatnú singularitu, ako ukazujeme v Príklade 51. V súlade s Vetou 44 nadobúda  $f$  v každom prstencovom okolí bodu 0 všetky komplexné hodnoty okrem hodnoty 0.

Nasledujúca veta poskytuje kritérium na zistenie typu izolovaného singulárneho bodu funkcie prostredníctvom skúmania limity danej funkcie v tomto bode.

### Veta 45

Nech funkcia  $f$  má v bode  $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  izolovanú singularitu. Potom platí:

- (i) Bod  $z_0$  je odstrániteľná singularita práve vtedy, keď existuje vlastná limita  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .
- (ii) Bod  $z_0$  je pól práve vtedy, keď  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .
- (iii) Bod  $z_0$  je podstatná singularita práve vtedy, keď neexistuje  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

### Poznámka 16

Ak funkcia  $f$  má v bode  $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  **odstrániteľnú singularitu**, potom je možné  $f$  **holomorfne rozšíriť** i do bodu  $z_0$ . Dá sa totiž ukázať, že funkcia  $g$  definovaná

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0, \\ L := \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}, & z = z_0, \end{cases}$$

je holomorfná na okolí bodu  $z_0$ , a teda aj v samotnom bode  $z_0$ . To je aj dôvod označenia “odstrániteľná” singularita, nakoľko  $g$  už nemá v  $z_0$  singulárny bod.

## Veta 46

Bod  $z_0 \in \mathbb{C}$  je pól rádu  $k \in \mathbb{N}$  funkcie  $f$  práve vtedy, keď

$$f(z) = g(z)/(z - z_0)^k \quad \text{na nejakom okolí bodu } z_0,$$

kde  $g$  je funkcia holomorfná a nenulová v  $z_0$ . Podobne, nevlastný bod  $\infty$  je pól rádu  $k \in \mathbb{N}$  funkcie  $f$  práve vtedy, keď  $z_0 = 0$  je pól rádu  $k$  funkcie  $f(1/z)$ , t.j.,

$$f(z) = z^k h(z) \quad \text{na okolí bodu } \infty$$

pre istú funkciu  $h$  holomorfnú a nenulovú v  $\infty$ .

## Poznámka 17

Okrem Vety 46 sa často využíva i ďalšie ekvivalentné kritérium prítomnosti pólu. Konkrétne, bod  $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  je **pól** rádu  $k \in \mathbb{N}$  funkcie  $f$  práve vtedy, keď  $z_0$  je  $k$ -násobný **nulový bod** funkcie  $g(z) = 1/f(z)$ . Poznamenajme, že funkcia  $g$  holomorfná v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  s  $g \not\equiv 0$  na okolí bodu  $z_0$  má v  $z_0$   $k$ -násobný nulový bod, ak  $g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(k-1)}(z_0) = 0$  a  $g^{(k)}(z_0) \neq 0$ . Nevlastný bod  $z_0 = \infty$  sa nazýva  $k$ -násobný nulový bod funkcie  $g$ , ak  $0$  je  $k$ -násobný nulový bodom funkcie  $g(1/z)$ .

## Príklad 50

Nájdime všetky izolované singularities funkcie

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Podozrivé sú zrejme body  $z_1 = 0$  a  $z_2 = \infty$ . Keďže výrazy  $\sin z$  a  $z$  sú celými funkciami a  $\lim_{z \rightarrow 0} \sin z = 0 = \lim_{z \rightarrow 0} z$ , využitím L'Hospitalovho pravidla vo Vete 25 máme

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sin z)'}{z'} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1 \in \mathbb{C}.$$

Podľa Vety 45(i) má teda funkcia  $f$  v bode  $z_1 = 0$  odstrániteľnú singularitu. To potvrdzuje i Laurentov rozvoj funkcie  $f$  v okolí bodu 0

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots,$$

ktorého hlavná časť je nulová. Naproti tomu v nevlastnom bode  $z_2 = \infty$  má funkcia  $f$  podstatnú singularitu, pretože Laurentov rad pre  $f$  so stredom v bode  $\infty$  (t.j., práve zostrojený rozvoj so stredom v bode 0) má vo svojej hlavnej časti (t.j., v regulárnej časti rozvoja so stredom 0) nekonečne veľa nenulových členov.

## Príklad 51

Stanovme všetky izolované singularity a ich typ pre funkciu

$$f(z) = e^{1/z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Do úvahy pripadajú zrejme body  $z_1 = 0$  a  $z_2 = \infty$ . Funkciu  $f$  rozvinieme do Laurentovho radu so stredom 0. Z definície exponenciálnej funkcie v (41) platí

$$e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{4!} z^{-4} + \dots$$

Ihneď vidíme, že v bode  $z_1 = 0$  má funkcia  $f$  podstatnú singularitu a bod  $\infty$  je odstrániteľná singularita  $f$ . Tieto skutočnosti vyplývajú i z Vety 45, nakoľko

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^{1/z} = \left| \text{substitúcia } w = \frac{1}{z}, \quad w \rightarrow 0 \right| = \lim_{w \rightarrow 0} e^w = e^0 = 1 \in \mathbb{C},$$

kým limita  $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$  neexistuje (uvážme napríklad cestu  $z = iy$  pre  $y \rightarrow 0$  a výsledok v závere Príkladu 35).

## Príklad 52

Určme izolované singularity funkcie

$$f(z) = \frac{z^4}{(z+2)^3}.$$

Funkcia  $f$  je holomorfná v celej komplexnej rovine okrem bodu  $z_0 = -2$ , ktorý je teda izolovanou singularitou funkcie  $f$ . Funkcia  $g(z) = z^4$  je holomorfná v  $\mathbb{C}$  a nenulová na okolí bodu  $-2$ . Preto z Vety 46 ihneď vyplýva, že  $f$  má v bode  $z_0$  pól rádu 3. Preskúmame ešte nevlastný bod  $\infty$ . Uvažujme funkciu

$$h(z) = f(1/z) = \frac{1/z^4}{(1/z+2)^3} = \frac{1}{z(1+2z)^3}.$$

Keďže výraz  $1/h(z) = z(1+2z)^3$  má v 0 jednoduchý (1-násobný) nulový bod, podľa Poznámky 17 má funkcia  $h$  v bode 0 pól rádu 1 (jednoduchý pól). Z Vety 46 potom vyplýva, že  $f$  má v bode  $\infty$  pól rádu 1. Obzvlášť,  $f$  má tvar

$$f(z) = \frac{z^4}{(z+2)^3} = z \cdot \left( \frac{z}{z+2} \right)^3,$$

pričom výraz  $[z/(z+2)]^3$ , ako možno ukázať, je holomorfný a nenulový v  $\infty$ .

# Cauchyho teória rezíduí

Nech  $f$  je funkcia holomorfná na prstencovom okolí  $K^*(z_0, R)$ ,  $R > 0$ , bodu  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Podľa Vety 42 potom existuje Laurentov rozvoj (83) funkcie  $f$  v okolí bodu  $z_0$ , t.j., platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in K^*(z_0, R). \quad (87)$$

Laurentov koeficient  $a_{-1}$  v rade v (87) sa nazýva **rezíduum funkcie  $f$  v bode  $z_0$**  a označuje sa  $a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f$ . Pre  $z_0 = \infty$  sa **rezíduum  $\operatorname{res}_{\infty} f$  funkcie  $f$  v bode  $\infty$**  definuje  $\operatorname{res}_{\infty} f = -a_1$ , kde  $a_1$  je koeficient v Laurentovom rozvoji

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n \quad (88)$$

funkcie  $f$  v prstencovom okolí  $K^*(\infty, R)$ ,  $R > 0$ , bodu  $\infty$ . Poznamenajme, že v oboch prípadoch (t.j., pre vlastný i nevlastný bod) sa rezíduum funkcie určuje pomocou **koeficientu stojacom pri mocnine  $(z - z_0)^{-1}$**  (resp. **pri mocnine  $z^{-1}$** ) v príslušnom Laurentovom rozvoji funkcie  $f$ .



## Poznámka 18

Významná aplikácia rezíduí funkcií komplexnej premennej súvisí s efektívnym výpočtom krivkových integrálov pozdĺž uzavretých ciest v  $\mathbb{C}$ . Konkrétne, ak  $f$  je funkcia holomorfná na prstencovom okolí  $K^*(z_0, R)$ ,  $R > 0$ , bodu  $z_0 \in \mathbb{C}$ , potom podľa formuly (85) v Laurentovej vete 42 platí

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} f(z) dz, \quad (89)$$

kde  $\varphi$  je kladne orientovaná kružnica  $|z - z_0| = \varrho$  s  $0 < \varrho < R$ . Pre funkciu  $f$  holomorfnú na prstencovom okolí  $K^*(\infty, R)$ ,  $R > 0$ , bodu  $\infty$  máme

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} f(z) dz, \quad (90)$$

kde  $\varphi$  je kladne orientovaná kružnica  $|z| = \varrho$  s  $1/R < \varrho < \infty$ .

## Veta 47 (Rezíduum funkcie v odstrániteľnej singularite)

Ak funkcia  $f$  má v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  odstrániteľnú singularitu, resp. je  $f$  dokonca holomorfná v  $z_0$ , potom  $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$ .

### Dôkaz Vety 47.

Priamo z definície odstrániteľnej singularity funkcie  $f$  v bode  $z_0 \in \mathbb{C}$  vyplýva, že  $\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1} = 0$ . Obzvlášť, ak  $f$  je holomorfná v bode  $z_0$ , potom podľa Poznámky 13 jej Laurentov rozvoj (87) splýva s jej Taylorovým rozvojom (82) v okolí bodu  $z_0$ , a teda opäť  $\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1} = 0$ . ■

### Poznámka 19

Poznamenajme, že výsledok Vety 47 **neplatí** v prípade odstrániteľnej singularity **v nevlastnom bode**  $\infty$ . Z Príkladu 45 vyplýva, že funkcia  $f(z) = 1/z$  má v  $\infty$  odstrániteľnú singularitu (dokonca je  $f$  holomorfná v  $\infty$ ), avšak  $\operatorname{res}_{\infty} f = -1$ .

### Veta 48 (Rezíduum funkcie v póloch)

*Nech funkcia  $f$  má v bode  $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  pól rádu  $k \in \mathbb{Z}$ . Potom platí*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)}, & z_0 \in \mathbb{C}, \\ -\frac{1}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow 0} [z^k f(1/z)]^{(k+1)}, & z_0 = \infty. \end{cases} \quad (91)$$

## Poznámka 20

Formuly (91) majú v prípade pólov rádu 1 (tzv. **jednoduchých pólov**) tvary

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \begin{cases} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)], & z_0 \in \mathbb{C}, \\ -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} [z f(1/z)]'', & z_0 = \infty. \end{cases} \quad (92)$$

Nasledujúce tvrdenie je možné interpretovať ako **zjednotenie a zovšeobecnenie** výsledkov Viet 29, 32, 33 a 34 získaných v rámci **Cauchyho teórie** komplexného krivkového integrálu. Zároveň predstavuje účinný **nástroj na výpočet** krivkových integrálov pozdĺž Jordanových ciest (ako sme už naznačili v Poznámke 18).

## Veta 49 (Cauchyho veta o rezíduách)

*Nech  $m$  je pevné nezáporné celé číslo. Nech  $\varphi$  je kladne orientovaná Jordanova cesta v  $\mathbb{C}$  a nech  $f : \overline{\operatorname{Int} \varphi} \rightarrow \mathbb{C}$  je funkcia holomorfná v  $\operatorname{Int} \varphi \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  a spojitá na  $\overline{\operatorname{Int} \varphi} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ , kde  $\{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subseteq \operatorname{Int} \varphi$ . Potom*

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_2} f + \dots + \operatorname{res}_{z_m} f] = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z_j} f.$$

## Dôsledok 7

Nech  $f$  je funkcia holomorfná na množine  $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ . Potom platí

$$\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_2} f + \dots + \operatorname{res}_{z_m} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0.$$

## Príklad 53

Určme rezíduá funkcií

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^3}, \quad a > 0, \quad \text{b) } g(z) = (z^2 + 1)e^{-z}$$

vo všetkých ich izolovaných singularitách a v bode  $\infty$ .

a) Racionálna lomená funkcia  $f$  je holomorfná v celej komplexnej rovine, okrem bodov  $z_1 = ia$  a  $z_2 = -ia$ . V oboch bodoch má  $f$  póly rádu 3, nakoľko

$$f(z) = \frac{1}{[(z - ia)(z + ia)]^3} = \frac{1}{(z - ia)^3(z + ia)^3}.$$

Podľa Vety 48 potom pre rezíduá funkcie  $f$  v bodoch  $\pm ia$  platí

## Príklad 53

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{ia} f &= \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \rightarrow ia} \left[ (z - ia)^3 \cdot \frac{1}{(z - ia)^3 (z + ia)^3} \right]'' \\
 &= (1/2) \cdot \lim_{z \rightarrow ia} [(z + ia)^{-3}]'' = (1/2) \cdot \lim_{z \rightarrow ia} 12 (z + ia)^{-5} \\
 &= 6 \cdot \lim_{z \rightarrow ia} (z + ia)^{-5} = -\frac{3i}{16a^5},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{-ia} f &= \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \rightarrow -ia} \left[ (z + ia)^3 \cdot \frac{1}{(z - ia)^3 (z + ia)^3} \right]'' \\
 &= (1/2) \cdot \lim_{z \rightarrow -ia} [(z - ia)^{-3}]'' = (1/2) \cdot \lim_{z \rightarrow -ia} 12 (z - ia)^{-5} \\
 &= 6 \cdot \lim_{z \rightarrow -ia} (z - ia)^{-5} = \frac{3i}{16a^5}.
 \end{aligned}$$

V nevlastnom bode  $\infty$  je funkcia  $f$  holomorfná, pretože výraz

$$f(1/z) = 1 / (z^{-2} + a^2)^3 = z^6 / (1 + a^2 z^2)^3$$

je holomorfný v bode 0. Podľa Dôsledku 7 potom máme  $\operatorname{res}_{\infty} f = 0$ .

## Príklad 53

b) Keďže funkcia  $g$  je celá (t.j., je holomorfná v celom  $\mathbb{C}$ ), z Dôsledku 7 ihneď vyplýva, že  $\operatorname{res}_{\infty} f = 0$ . Rovnaký výsledok by sme dostali i rozvinutím funkcie  $g$  do (v tomto prípade jediného) Laurentovho radu so stredom v bode 0

$$(z^2 + 1)e^{-z} = (z^2 + 1) \cdot \left( 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = 1 - z + \frac{3}{2}z^2 - \frac{7}{6}z^3 + \dots$$

Tento rozvoj je zároveň aj jediný Laurentov rozvoj funkcie  $g$  v okolí  $\infty$ . Keďže jeho hlavná časť obsahuje nekonečne veľa nenulových členov,  $g$  má v bode  $\infty$  podstatnú singularitu. Okrem toho vidíme, že hodnota rezídua funkcie  $g$  v  $\infty$ , ako záporne vzatý Laurentov koeficient pri mocnine  $z^{-1}$ , je skutočne 0.

## Príklad 54

Stanovme krivkový integrál

$$\int_{\varphi} e^{1/z} dz$$

po kladne orientovanej kružnici  $|z| = 1$ . Funkcia  $f(z) = e^{1/z}$  je holomorfná na celom  $\mathbb{C}$ , okrem  $z_0 = 0$ , pričom  $0 \in \operatorname{Int} \varphi$ . Z Príkladu 51 vyplýva, že  $\operatorname{res}_0 f = 1$ . Preto podľa Cauchyho reziduálnej vety 49 platí  $\int_{\varphi} e^{1/z} dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$ .

## Príklad 55

Vypočítajme krivkový integrál z funkcie

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2 + 1)}$$

po kladne orientovanej kružnici  $\varphi$  s vyjadrením  $|z + 1 + i| = 2$ . Funkcia  $f$  je holomorfná v celej komplexnej rovine okrem bodov  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = i$  a  $z_3 = -i$ . Tieto čísla sú jednoduché nuly výrazu  $1/f(z) = e^{-z}z(z-i)(z+i)$ . Teda podľa Poznámky 17 má funkcia  $f$  v bodoch  $z_1, z_2, z_3$  jednoduché póly. Navyiac, platí  $z_1, z_3 \in \text{Int } \varphi$ , kým  $z_2 \notin \text{Int } \varphi$ , ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Určíme preto rezíduá funkcie  $f$  v bodoch  $z_1$  a  $z_3$ . Podľa Poznámky 20 máme

$$\text{res}_0 f = \lim_{z \rightarrow 0} [e^z / (z^2 + 1)] = 1, \quad \text{res}_{-i} f = \lim_{z \rightarrow -i} \{e^z / [z(z - i)]\} = -e^{-i}/2.$$

Aplikáciou Cauchyho rezíduálnej vety 49 potom dostaneme

$$\int_{\varphi} \frac{e^z}{z(z^2 + 1)} dz = 2\pi i [\text{res}_0 f + \text{res}_{-i} f] = \pi i [2 - e^{-i}].$$