

# **PB165 Grafy a sítě: Plánování projektu, plánování pomocí barvení grafu**

# Obsah

## 1 Plánování projektu

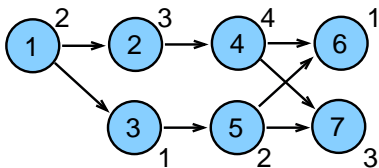
- Neomezené zdroje
- Variabilní doba trvání

## 2 Barvení grafu

- Popis problému a jednoduché řešení
- Přiřazení místností
- Rezervační problém
- Rozvrhování operátorů

# Plánování projektu

- Základní problém **plánování projektu**
  - precedenční podmínky
  - paralelní stroj s **neomezeným počtem strojů**
  - minimalizace maximálního času konce úloh (*makespan*)
  - relativně jednoduché na řešení: metoda kritické (nejdelší) cesty  
princip: nalezneme kritickou cestu a ta určuje makespan



- Rozšíření: **variabilní doba trvání**
  - doba trvání úlohy spojena s cenou provádění
  - optimalizace: kompromis mezi cenou na ukončení projektu a cenou za zkrácení délky úloh

# Popis problému

- Popis problému
  - paralelních stroj
  - $n$  úloh s precedenčními omezeními
  - doba provádění  $p_j$
  - objektivní funkce: minimalizace maximálního času konce úloh (*makespan*)

## Základní problém s neomezenými zdroji

$P_\infty | prec | C_{max} \quad m \geq n \quad \text{metoda kritické cesty}$

## Plánování projektu s omezenými zdroji

$P_m | prec | C_{max} \quad 2 \leq m < n \quad \text{NP úplný problém}$

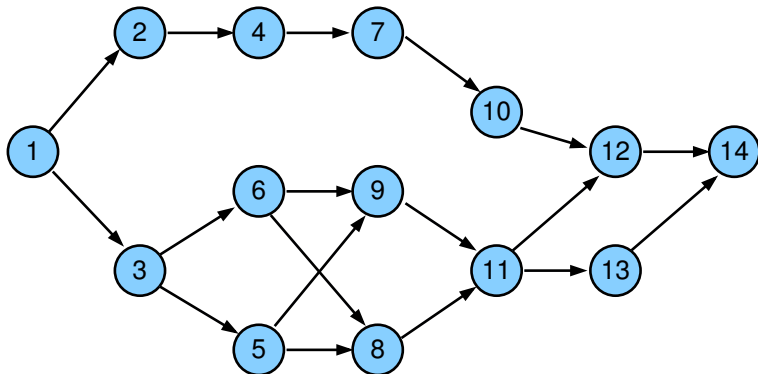
- Značení
  - $S'_j$  nejdřívější startovní čas úlohy  $j$   
 $C'_j = S'_j + p_j$  nejdřívější koncový čas úlohy  $j$
  - $S''_j$  nejpozdější startovní čas úlohy  $j$   
 $C''_j$  nejpozdější koncový čas úlohy  $j$
  - $Prec_j$  (přímí) předchůdci úlohy  $j$   
 $\forall k \in Prec_j$  všechny úlohy  $k$ , které předcházejí úlohu  $j$   
 $\forall j : k \in Prec_j$  všechny úlohy  $j$ , které následují úlohu  $k$

# Metoda kritické cesty (*critical path method CPM*)

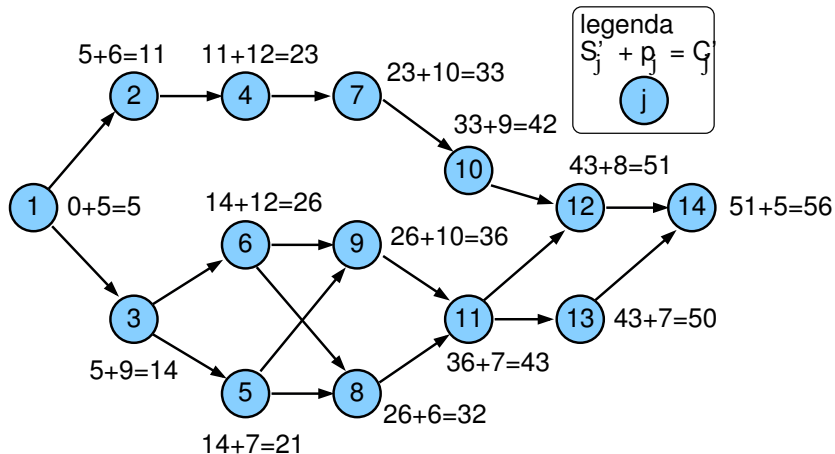
- Popis algoritmu pro nalezení kritických cest
    - **dopředná procedura**
      - start v čase 0
      - výpočet **nejdřívějšího startovního času** každé úlohy
      - čas dokončení poslední úlohy je *makespan*
    - **zpětná procedura**
      - start v čase rovném *makespan*
      - výpočet **nejpozdějšího startovního času**, aby byl realizován tento *makespan*
  - **Úloha s rezervou (*slack job*)**
    - její startovní čas může být odložen aniž je navýšen *makespan*
    - úloha  $j$ , jejichž nejdřívější startovní čas  $S_j'$  je menší než nejpozdější startovní čas  $S_j''$
    - **rezerva úlohy  $j$** :  $S_j'' - S_j'$
  - **Kritická úloha**
    - úloha, která nesmí být odložena
    - úloha, jejíž nejdřívější startovní čas je roven nejpozdějšímu start. času
  - **Kritická cesta**
    - **řetěz úloh začínající v čase 0 a končící v čase  $C_{max}$**
    - v grafu může existovat více kritických cest
    - kritické cesty se mohou částečně překrývat
    - **graf kritických cest  $G_{CP}$** : podgraf daný množinou kritických úloh a kritických cest
- Cvičení: Jaký je rozdíl mezi kritickou cestou a grafem kritických cest? Ukažte rozdíl na příkladu.

# Kritická cesta: zadání příkladu

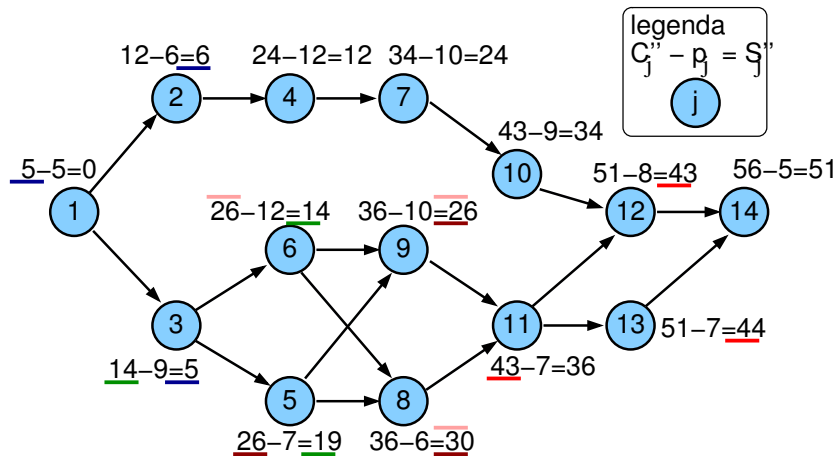
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p_j$	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5



# Příklad: dopředná procedura

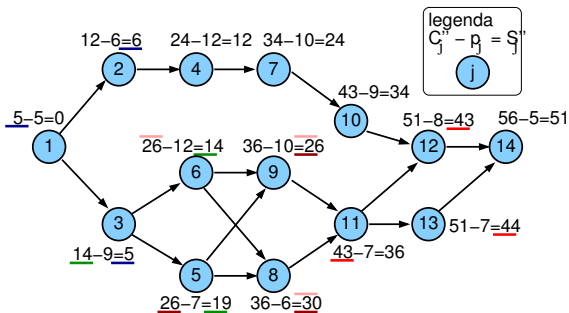
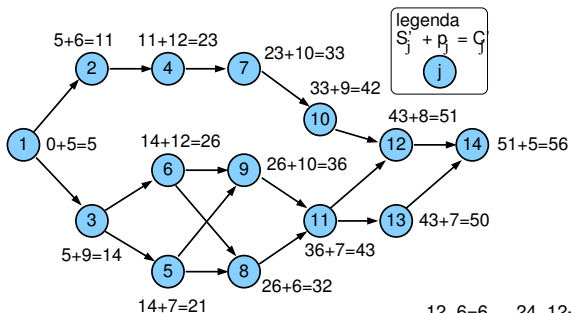


# Příklad: zpětná procedura

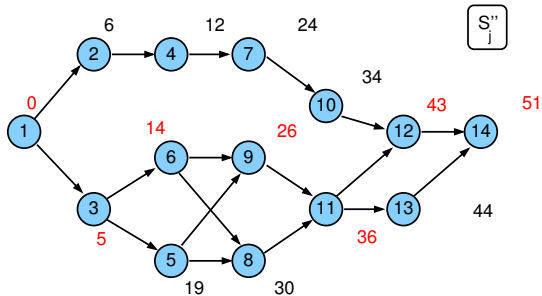
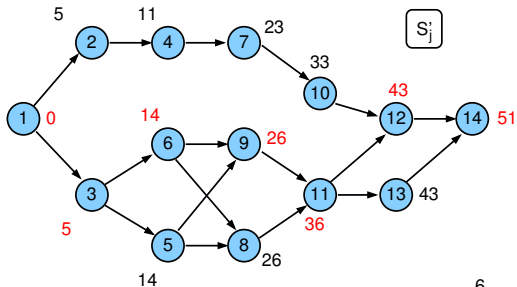




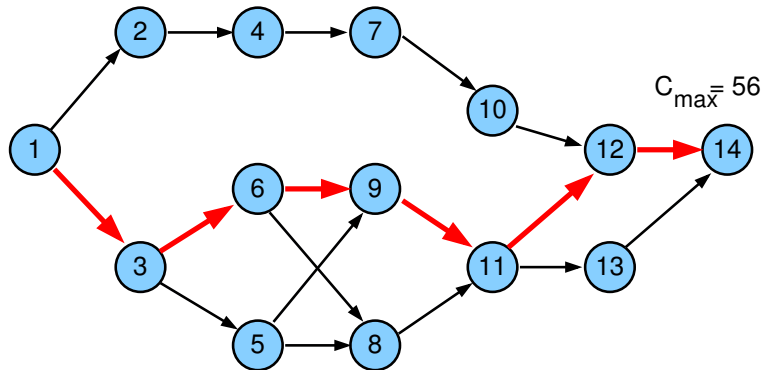
# Výsledky dopředné a zpětné procedury



# Porovnání $S'_j$ a $S''_j$

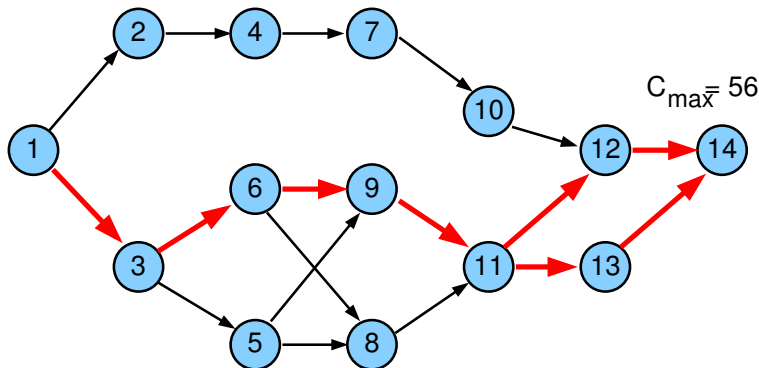


# Kritická cesta



# Graf kritických cest $G_{CP}$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p <sub>j</sub>	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	8	5

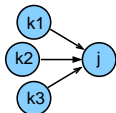


- $G_{CP}$ : dvě kritické cesty  $\{1, 3, 6, 9, 11, 12, 14\}$ ,  $\{1, 3, 6, 9, 11, 13, 14\}$ , které se částečně překrývají

# Metoda kritické cesty

## ① Dopředná procedura

- ①  $t = 0$
- ② pro všechny úlohy  $j$  bez předchůdce:  $S'_j = 0, C'_j = p_j$
- ③ vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy  $j$ :

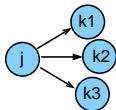


$$S'_j = \max_{\forall k \in \text{Prec}_j} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

- ④ optimální *makespan* je  $C_{max} = \max(C'_1, \dots, C'_n)$

## ② Zpětná procedura

- $t = C_{max}$
- pro všechny úlohy  $j$  bez následníka:  $C''_j = C_{max}, S''_j = C_{max} - p_j$
- vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy  $j$ :



$$C''_j = \min_{\forall k: j \in \text{Prec}_k} S''_k, \quad S''_j = C''_j - p_j$$

- ověř, že  $0 = \min(S''_1, \dots, S''_n)$

# Cvičení

- ① Jaká je grafová reprezentace rozvrhovacího problému zadaného tabulkou:

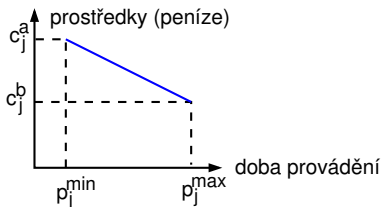
úloha	doba trvání	předchůdci
1	1	-
2	2	1
3	3	1
4	4	2,5,6
5	5	1,2
6	2	3
7	4	-
8	1	7,9
9	5	4
10	2	8

- ② Nalezněte graf kritických cest v tomto grafu.
- ③ Jaký má tento rozvrh makespan?
- ④ Existují v problému úlohy s rezervou? Pokud ano, uveďte o které úlohy se jedná. Jakou mají tyto úlohy rezervu?

# Kompromis mezi časem a cenou

- Lze uvažovat **variabilní dobu trvání úloh**
  - za předpokladu vyšší ceny lze zkrátit dobu provádění
- **Lineární cena**
- Doba trvání  $p_j^{min} \leq p_j \leq p_j^{max}$
- **Marginální cena**: cena za zkrácení doby trvání úlohy o 1 časovou jednotku

$$c_j = \frac{c_j^a - c_j^b}{p_j^{max} - p_j^{min}}$$



⇒ cena provádění úlohy  $j$  po dobu  $p_j$ :  $c_j^b + c_j(p_j^{max} - p_j)$

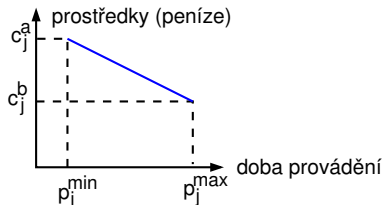
# Cena za provádění projektu

- **Fixní režijní náklady**  $c_0$   
na časovou jednotku doby provádění projektu
- **Cena**  $F(p_j)$  **za provádění projektu**
  - při době provádění úloh  $p_j$určena jako součet
  - ceny za provádění všech úloh
  - fixních režijních nákladů

celkem:  $C_{\max}c_0$

$$F(p_j) = C_{\max}c_0 + \sum_j (c_j^b + c_j(p_j^{\max} - p_j))$$

- **Cíl:**  $\forall j$  nalézt  $p_j$  a  $S_j$  tak, aby byla  $F(p_j)$  minimální



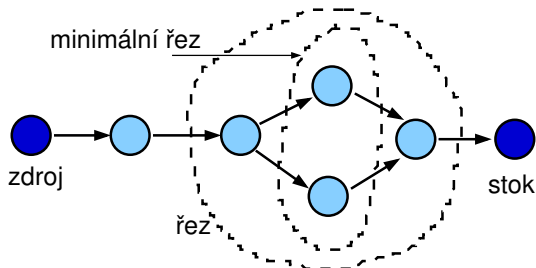


# Variabilní doba trvání: metody řešení

- Objektivní funkce: minimální cena projektu
- **Kompromisní heuristika mezi časem a cenou**
  - dobrá kvalita rozvrhu
  - použitelné i pro nelineární cenu
- Další přístupy: **formulace lineárního programování**
  - systém lineárních nerovnic s lineárním optimalizačním kritériem
  - simplexová metoda
  - optimální rozvrh
  - nelineární verze obtížně řešitelné

# Řez, minimální řez

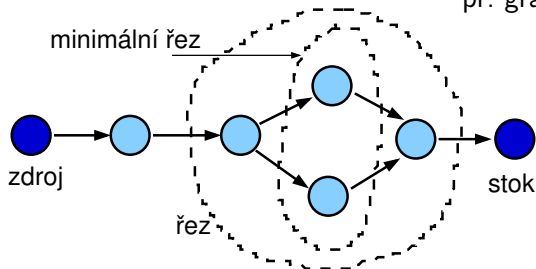
- Orientovaný graf  $G = (V, E)$
- Počáteční uzel: zdroj  $s \in V$
- Koncový uzel: stok  $t \in V$
- **Řez ze zdroje  $s$  do stoku  $t$ :** ... také mluvíme o vrcholovém řezu množina uzlů  $V'$ , jejíž smazáním z grafu se rozpojí zdroj a stok
  - $E'$  množina hran incidentních s  $V'$tj. v  $G'=(V-V',E-E')$  neexistuje orientovaná cesta z  $s$  to  $t$
- **Minimální řez z  $s$  do  $t$ :** řez  $U$  takový, že neexistuje řez  $W \subset U$ 
  - tj. vrácení libovolného uzlu z  $U$  do grafu znovu spojí zdroj a stok



# Řez, minimální řez II.

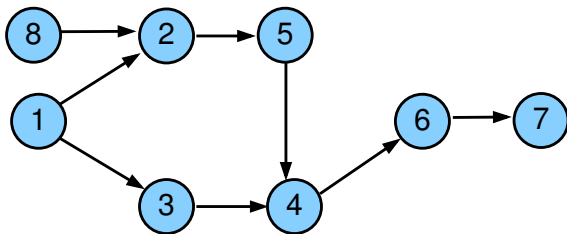
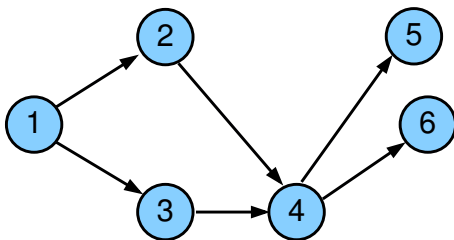
- Uvažujme orientovaný graf  $G_0 = (V_0, E_0)$
- Do grafu přidáme zdroj:
  - nový vrchol  $s$  a
  - hrany  $S$  vedoucí z  $s$  do všech vrcholů  $G_0$  bez předchůdců
- Do grafu přidáme stok:
  - nový vrchol  $t$  a
  - hrany  $T$  vedoucí ze všech vrcholů  $G_0$  bez následníků do  $t$
- Nový graf  $G = (V, E)$ :  $V = V_0 \cup \{s, t\}$ ,  $E = E_0 \cup S \cup T$
- Budeme hledat řezy a minimální řezy z  $s$  do  $t$  v  $G$

př. graf má 4 minimální řezy



# Cvičení: minimální řez

Kolik minimálních řezů a které mají následující grafy?

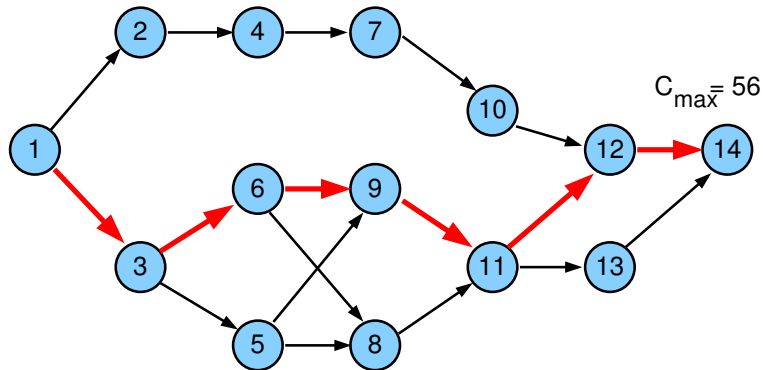


# Kompromisní heuristika: příklad

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p_j^{\max}$	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5
$p_j^{\min}$	3	5	7	9	5	9	8	3	7	5	4	5	5	2
$c_j^b$	20	25	20	15	30	40	35	25	30	20	25	35	20	10
$c_j$	7	2	4	3	4	3	4	4	4	5	2	2	4	8

fixní režijní náklady na časovou jednotku  $c_0=6$

# Příklad (pokračování): maximální doba provádění



# Kompromisní heuristika: příklad

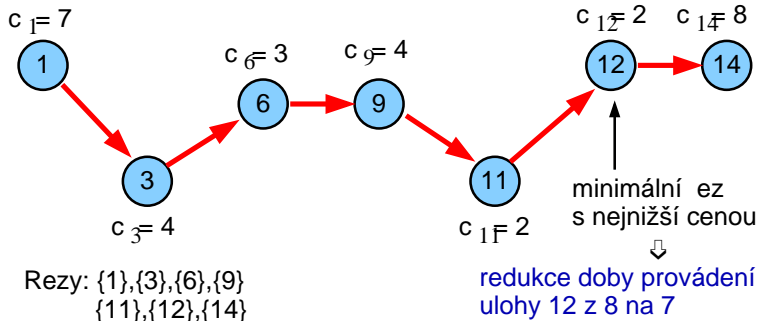
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p_j^{\max}$	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5
$c_0=6$ $p_j^{\min}$	3	5	7	9	5	9	8	3	7	5	4	5	5	2
$c_j^b$	20	25	20	15	30	40	35	25	30	20	25	35	20	10
$c_j$	7	2	4	3	4	3	4	4	4	5	2	2	4	8

Náklady na provedení projektu při maximální době trvání úloh

$$\begin{aligned}F(p_j^{\max}) &= C_{\max}c_0 + \sum_j (c_j^b + c_j(p_j^{\max} - p_j^{\min})) = \\&= C_{\max}c_0 + \sum_j c_j^b = \\&= 56 \times 6 + 20 + 25 + 20 + 15 + 30 + 40 + 35 + 25 + \\&\quad + 30 + 20 + 25 + 35 + 20 + 10 = \\&= 336 + 350 = 686\end{aligned}$$

# Graf kritických cest $G_{CP}$

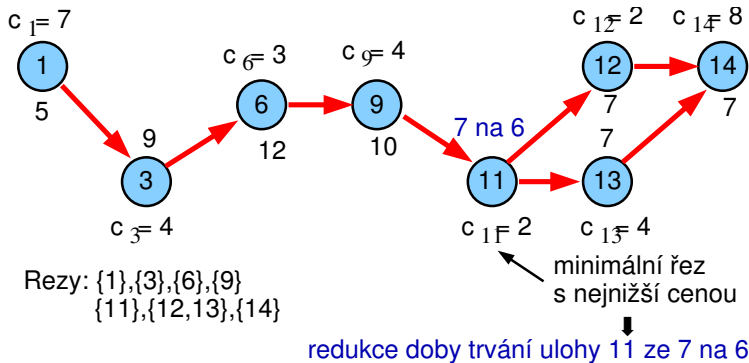
- Kandidáti na redukci: uzel 11 a uzel 12, vybereme uzel 12



- Fixní režijní náklady se redukují z  $56 \times 6$  na  $55 \times 6 = 330$
- Cena za provádění úloh naroste o  $c_{12} = 2$ , tj.  $350 + 2 = 352$
- Celková cena klesla z 686 na  $330 + 352 = 682$

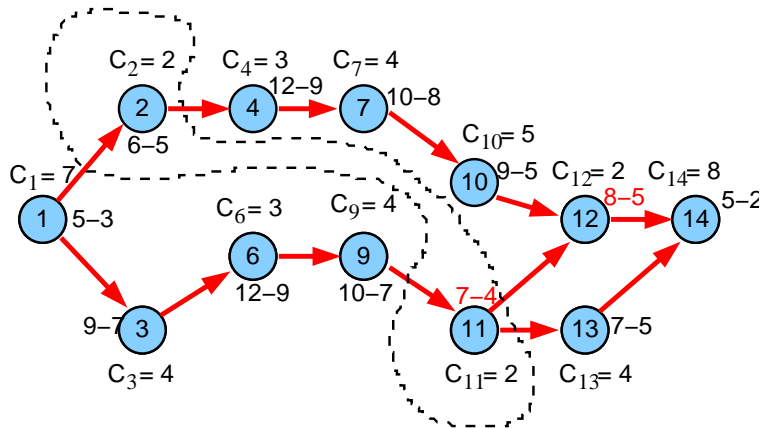


# Graf kritických cest $G_{CP}$



- Fixní režijní náklady se redukuje z  $55 \times 6$  na  $54 \times 6 = 324$
- Cena za provádění úloh naroste o  $c_{11} = 2$ , tj.  $352 + 2 = 354$
- Celková cena klesla z 682 na  $324 + 354 = 678$

# Graf kritických cest $G_{CP}$



další redukce: pro uzel 2 na 5 a pro uzel 11 na 5, ...

- Fixní režijní náklady se redukuje z  $54 \times 6$  na  $53 \times 6 = 318$
- Cena za provádění úloh naroste o  $c_2 + c_{11} = 2 + 2$ , tj.  $354 + 4 = 358$
- Celková cena klesla z 678 na  $318 + 358 = 676$

# Algoritmus kompromisní heuristiky

- ①
  - Nastav doby provádění na jejich maximum:  $p_j = p_j^{max}$
  - Urči všechny kritické cesty s těmito dobami provádění
  - Zkonstruuuj graf  $G_{CP}$  kritických cest
- ②
  - Urči všechny minimální řezy v  $G_{CP}$
  - Najdi řezy, jejichž doba provádění je větší než jejich minimum:  
 $p_j > p_j^{min} \quad \forall j \in G_{CP}$
  - Pokud takový řez neexistuje STOP, jinak běž na krok 3
- ③
  - Pro každý minimální řez: spočítej cenu redukující všechny doby provádění o 1 časovou jednotku
  - Vyber minimální řez s nejnižší cenou
  - Jestliže je menší než fixní režijní náklady  $c_0$  za časovou jednotku běž na krok 4, jinak STOP
- ④
  - Redukuj všechny doby provádění v minimálním řezu o 1 časovou jednotku
  - Urči novou množinu kritických cest
  - Reviduj graf  $G_{CP}$  a běž na krok 2

# Kompromisní heuristika: cvičení

- Jaká je cena za provádění projektu, pokud jsou doby trvání úloh maximální, tj. čemu se rovná  $F(p_j^{max})$  za následujících předpokladů?
  - fixní režijní náklady na časovou jednotku jsou  $c_0 = 4$
  - $p_j^{max}$  maximální doba trvání úlohy  $j$
  - $p_j^{min}$  minimální doba trvání úlohy  $j$
  - $c_j$  marginální cena
  - $c_j^b$  cena za provádění úlohy  $j$  při maximální době jejího trvání
  - $Prec_j$  předchůdci úlohy  $j$

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_j^{max}$	4	4	4	4	4	4	3	6
$p_j^{min}$	3	2	2	2	2	2	2	6
$c_j^b$	20	25	20	15	30	40	35	25
$c_j$	3	5	5	1	2	5	3	5

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$Prec_j$	-	1	4,5	2	2	3,7	5	6

- Jak lze cenu za projekt zlepšit, pokud provedeme dva kroky kompromisní heuristiky? Kterým úlohám upravíte dobu trvání v jednotlivých krocích?

# Obsah

## 1 Plánování projektu

- Neomezené zdroje
- Variabilní doba trvání

## 2 Barvení grafu

- Popis problému a jednoduché řešení
- Přiřazení místností
- Rezervační problém
- Rozvrhování operátorů

# Barvení grafu

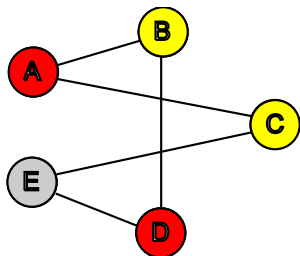
## Problém barvení grafu

- Je možné obarvit vrcholy grafu s použitím  $n$  barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou?

## Chromatické číslo grafu

- Minimální počet barev  $n$  nutný k obarvení grafu tak, by žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

NP-úplný problém



## Barvení grafu a rozvrhování

- Rezervační problémy
- Přřazení místností
- Rozvrhování operátorů

# Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- **Stupeň uzlu**
  - počet hran spojených s uzlem
- **Úroveň saturace**
  - počet různých barev spojených s uzlem
- Intuice
  - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
  - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve
- **Algoritmus**
  - ① uspořádej uzly v klesajícím pořadí podle jejich stupně
  - ② použij barvu 1 pro první uzel
  - ③ vyber neobarvený uzel s maximální úrovní saturace  
v případě volby z nich vyber uzel  
s maximálním stupněm v **neobarveném podgrafu**
  - ④ obarvi vybraný uzel s nejmenší možnou barvou
  - ⑤ jestliže jsou všechny uzly obarveny STOP  
jinak běž na krok 3

# Přřazení místností

- **Problém přřazení místností**

cíl: přřazení místnosti každému předmětu se zadanými časy

- úloha = předmět s několika schůzkami týdně, jejichž časy jsou určeny
- zdroj = místnost
- dva předměty nesmí být zároveň vyučovány ve stejné místnosti
- všechny schůzky předmětu musí být vyučovány ve stejné místnosti

možné řešení:

- nalezení rozvrhu vzhledem k danému počtu místností
- nalezení rozvrhu s minimálním počtem místností

- **Přřazení místností jako barvení grafu**

- vrchol: předmět
- hrana: mezi předměty, které vyžadují stejný čas výuky
- barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti (zdroji)
  - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas



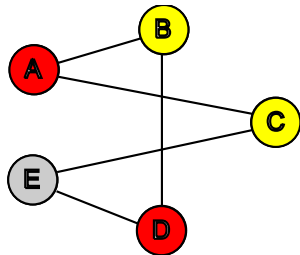
# Přiřazení místností: příklad

Kolik místností je třeba k rozvrhování těchto předmětů?

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
stupeň	2	2	2	2	2

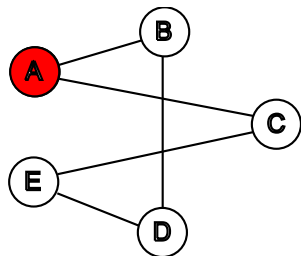
Řešení:

místnost      červená      žlutá      žlutá      červená      šedá

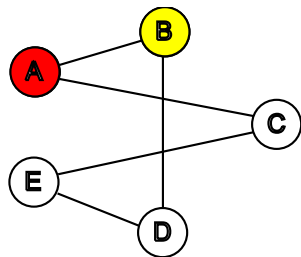


čas/předmět	A	B	C	D	E
1	+	+	-	-	-
2	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	-
5	-	-	-	+	+

# Přřazení místností: příklad (pokračování)

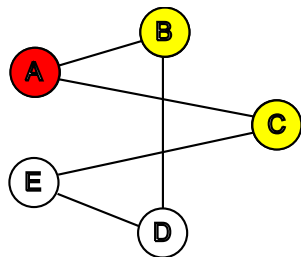


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	1	1	0	0
stupeň neob.	-	1	1	2	2

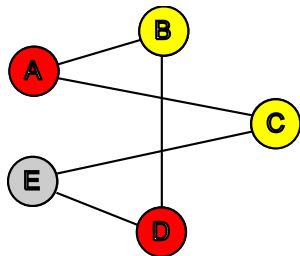
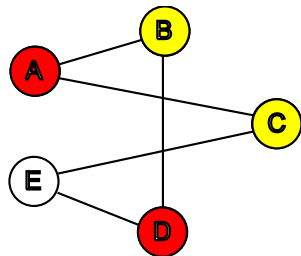


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	1	1	0
stupeň neob.	-	-	1	1	2

# Přřazení místností: příklad (dokončení)



předmět	A	B	C	D	E
saturovac	-	-	-	1	1
stupeň neob.	-	-	-	1	1



# Rezervační problém

- Příklady
  - rezervace aut
  - rezervace pokojů v hotelu
  - rezervace strojů v továrně
- Určen časový interval pro každou rezervaci
  - $p_j = d_j - r_j$
  - $p_j$  doba trvání úlohy
  - $r_j$  termín dostupnosti
  - $d_j$  termín dokončení
- Každá rezervace vyžaduje zdroj (auto, pokoj, stroj)
- Možné řešení
  - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů?
  - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací?

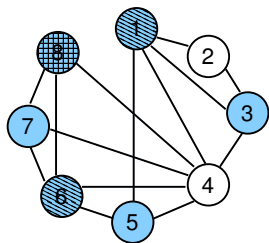
# Rezervační problém jako barvení grafu

- Vrchol: rezervace
- Hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase
- Barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji
  - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase
  - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací = chromatické číslo
  - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů = existuje barvení s daným počtem barev

● Příklad:

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$r_j$	0	1	1	3	4	5	6	6
$d_j$	5	3	4	7	6	7	9	8

Odpovídající problém barvení grafu:



# Rozvrhování operátorů

- Zadáno několik různých operátorů
- Úloha potřebuje jeden nebo více specifických operátorů
- Úlohy vyžadující stejného operátora nemohou běžet zároveň
- Jednotková doba trvání úlohy
- Možné řešení:
  - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
  - nalezení minimálního času (=makespan) tak, aby byly provedeny všechny úlohy
- **Rozvrhování operátorů jako barvení grafu**
  - vrchol: úloha
  - hrana: mezi úlohami, které potřebují stejného operátora
  - barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy
    - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora
    - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu = existuje barvení s daným počtem barev
    - makespan = chromatické číslo grafu

# D.Ú. plánování schůzek

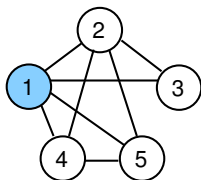
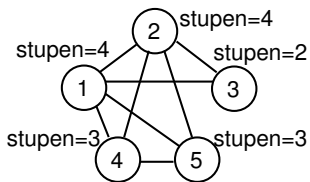
Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1

# D.Ú. plánování schůzek (řešení)

	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1

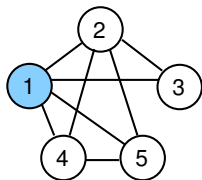


Můžeme vybrat buď  
úlohu 1 nebo úlohu 2

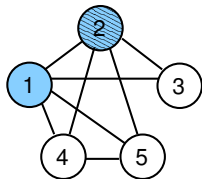
Např. vybereme 1 a obarvíme  
barvou 1



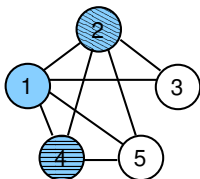
# D.Ú. plánování schůzek (dokončení)



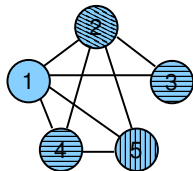
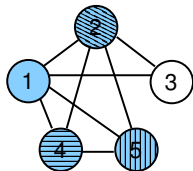
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy  
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly  
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro uzel 3  
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5  
Vyber 5 na obarvení



V posledním kroku obarvi 3  
stejnou barvou jako 4  
⇒ celkem 4 barvy, tj. *makespan*=4

# Shrnutí

## Přřazení místností

- vrchol: předmět úloha
- hrana: mezi předměty vyžadujícími stejný čas **průnik časových bodů**
- barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti zdroj
  - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas

## Rezervační problém

- vrchol: rezervace úloha
- hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase **průnik intervalů**
- barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji zdroj
  - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase

## Rozvrhování operátorů

- vrchol: úloha úloha
- hrana: mezi úlohami vyžadujícími stejného operátora **průnik zdrojů**
- barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy časový bod
  - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora

# Cvičení

Jakou grafovou reprezentaci mají následující problémy? Problémy vyřešte a ukažte postup řešení.

- 1 Určete, ve kterých místnostech se mají konat schůzky tak, aby byla v každé místnosti nejvýše jedna schůzka a přitom byly schůzky organizovány v uvedených termínech.

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,3,5)	(2,4)	(1,2)	(3,4)	(1,5)

Nápověda: problém přiřazení místností

- 2 Stroje v továrně mají být využívány uvedenými operacemi v následujících časových intervalech. Určete, kolik strojů je třeba a které stroje budou využívat jednotlivé operace v případě, že stroj může zpracovávat nejvýše jednu operaci.

operace	A	B	C	D	E	F
interval	1-3	2-4	1-4	4-5	5-8	5-6

Nápověda: rezervační problém

# Cvičení (pokračování)

- ③ Určete, kolik času je potřeba pro realizaci operací na uvedených strojích, jestliže může být na každém stroji zpracovávána nejvýše jedna operace.

operace	1	2	3	4	5	6	7
stroje	A,B	C,D	A,C,E	E,F	E,G	D,G	G

Nápověda: rozvrhování operátorů