

IB015 Neimperativní programování

A zase ta REKURZE ...
(Rekurze a indukce, Rekurzivní datové typy)

Jiří Barnat
Libor Škarvada

Jiný pohled na rekurzivní funkce

Rekurze

- Definice funkce, nebo datové struktury, s využitím sebe sama.

Příklad

- Funkce `length`, která při aplikaci na seznam vrací jeho délku, je definovaná rekurzivně:

```
length :: [a] -> Integer
length [] = 0
length (_:s) = 1 + length s
```

Zacyklení výpočtu

- Ne každé použití definovaného objektu na pravé straně definice je smysluplné.
- Nesprávné použití může vést k nekonečnému vyhodnocování, které nemá žádný efekt – **výpočet cyklů**.

Příklad

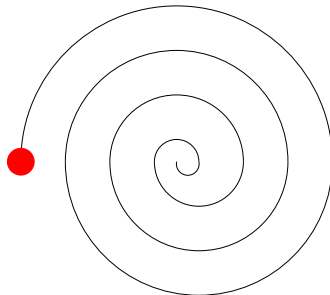
- Nesprávné použití rekurze ve funkci `length'` :
`length' :: [a] -> Integer`
`length' [] = 0`
`length' x = length' x`
- Při aplikaci `length'` na neprázdný seznam výpočet cyklů.
- Chybu neodhalí typová kontrola, definice je typově správně.

Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
= 1 + length [3,2,1]
= 1 + 1 + length [2,1]
= 1 + 1 + 1 + length [1]
= 1 + 1 + 1 + 1 + length []
= 1 + 1 + 1 + 1 + 0
= 4
```

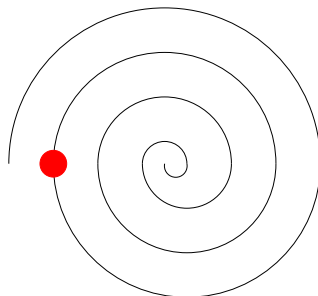


Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
= 1 + length [3,2,1]
= 1 + 1 + length [2,1]
= 1 + 1 + 1 + length [1]
= 1 + 1 + 1 + 1 + length []
= 1 + 1 + 1 + 1 + 0
= 4
```

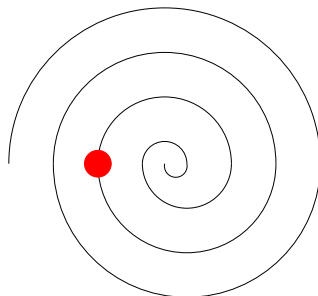


Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
= 1 + length [3,2,1]
= 1 + 1 + length [2,1]
= 1 + 1 + 1 + length [1]
= 1 + 1 + 1 + 1 + length []
= 1 + 1 + 1 + 1 + 0
= 4
```

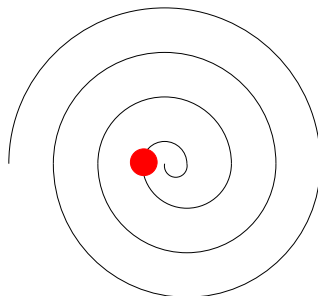


Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
= 1 + length [3,2,1]
= 1 + 1 + length [2,1]
= 1 + 1 + 1 + length [1]
= 1 + 1 + 1 + 1 + length []
= 1 + 1 + 1 + 1 + 0
= 4
```

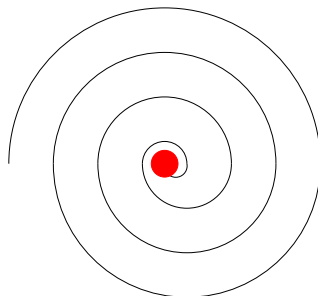


Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
  = 1 + length [3,2,1]
  = 1 + 1 + length [2,1]
  = 1 + 1 + 1 + length [1]
  = 1 + 1 + 1 + 1 + length []
  = 1 + 1 + 1 + 1 + 0
  = 4
```

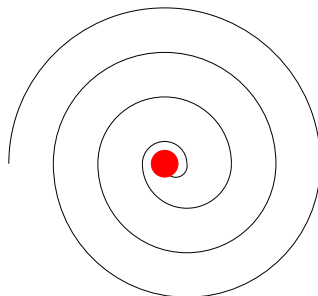


Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
  = 1 + length [3,2,1]
  = 1 + 1 + length [2,1]
  = 1 + 1 + 1 + length [1]
  = 1 + 1 + 1 + 1 + length []
  = 1 + 1 + 1 + 1 + 0
  = 4
```

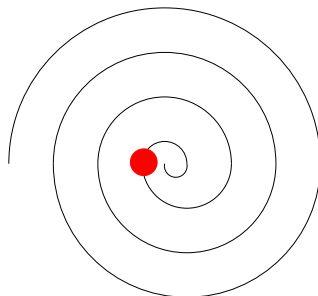


Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
  = 1 + length [3,2,1]
  = 1 + 1 + length [2,1]
  = 1 + 1 + 1 + length [1]
  = 1 + 1 + 1 + 1 + length []
  = 1 + 1 + 1 + 1 + 0
  = 4
```

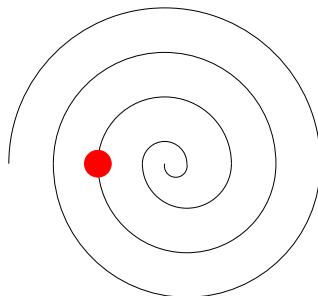


Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
= 1 + length [3,2,1]
= 1 + 1 + length [2,1]
= 1 + 1 + 1 + length [1]
= 1 + 1 + 1 + 1 + length []
= 1 + 1 + 1 + 1 + 0
= 4
```

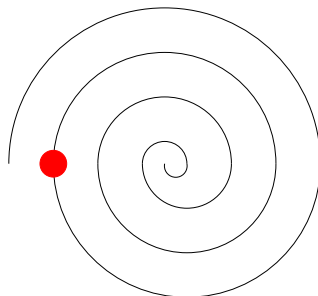


Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
  = 1 + length [3,2,1]
  = 1 + 1 + length [2,1]
  = 1 + 1 + 1 + length [1]
  = 1 + 1 + 1 + 1 + length []
  = 1 + 1 + 1 + 1 + 0
  = 4
```

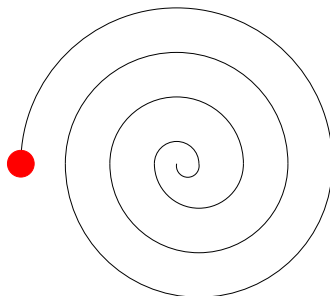


Pozorování

- Rekurze se někdy představuje jako definice kruhem. Lépe je však představit si rekurzi jako **spirálu**.
- Při výpočtu rekurzivního výrazu, který necyklí, se výpočet pohybuje "po spirále" a **nevyhnutelně** spěje k jejímu konci.

Demonstrace

```
length [4,3,2,1]
= 1 + length [3,2,1]
= 1 + 1 + length [2,1]
= 1 + 1 + 1 + length [1]
= 1 + 1 + 1 + 1 + length []
= 1 + 1 + 1 + 1 + 0
= 4
```



Pozorování

- Uvědomění si toho, co udává vzdálenost od středu pomyslné spirály, je klíč k správnému použití rekurze.

Rekurze ve funkci `length`

- Vzdálenost od středu odpovídá délce zbývajících částí seznamu.
- S každým dalším rekurzivním voláním funkce se seznam, který je argumentem funkce, zkracuje.
- Funkce `length` je tedy jednou nevyhnutelně volána pro prázdný seznam, což je volání, které rekurzi zastaví.

2 části definice

- Při definici rekurzivní funkce je nutné si uvědomit, co je **středem spirály**, tj. kde se má výpočet rekurzivní funkce zastavit, a **jak se k tomuto středu bude výpočet blížit**.

Příklad – 2 části definice funkce length

- Ukončení rekurzivního výpočtu (střed spirály)

```
length [] = 0
```

- Jedno rekurzivní volání (přiblížení se o "jednu otáčku")

```
length (x:s) = 1 + length s
```

Příklad – 2 části definice v jednom výrazu

- Obě části v jednom řádku definice

```
f1 :: Integer -> Integer
```

```
f1 x = if (odd x) then x else f1 (x `div` 2)
```


Vzdálenost od středu

- To, že pomyslná vzdálenost od středu klesá, nemusí nutně znamenat, že datová struktura, se kterou rekurzivní funkce pracuje, se zmenšuje.

Příklad

- Je-li cílem algoritmu opakovaným dělením celku dosáhnout určitého počtu dílků, počet dílků při každém dělení roste.
- Vzdálenost od středu pomyslné spirály lze v tomto případě identifikovat jako počet dělení, které zbývá k dosažení cílového počtu.
- Všimněme si, že pokud se při každém kroku zdvojnásobí počet dílků, jejich počet roste vzhledem k počtu rekurzivních kroků exponenciálně.

Pozadí rekurze

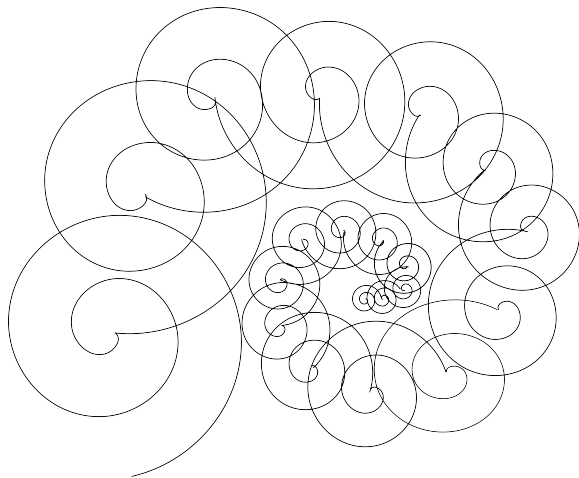
- Struktura, podle níž se řídí rekurze, nemusí být spojena s úplným uspořádáním.
- Musí však být **dobře založená** (well-founded), což znamená, že v ní neexistuje nekonečně dlouhá klesající posloupnost prvků.

Příklad

- Množina všech podmnožin dané množiny je pouze částečně uspořádána vzhledem k inkluzi, avšak postupné odebrání prvků z libovolné podmnožiny nevyhnutelně dospěje k prázdné množině.

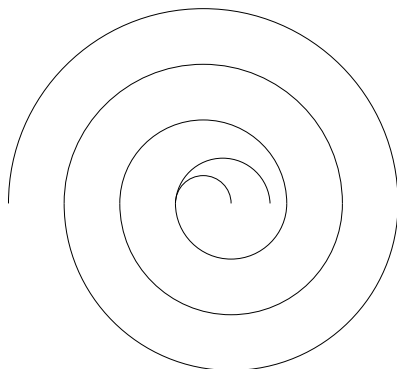
Vnořená rekurze

- Rekurzivně volané funkce se mohou vnořovat.
- "Spirála spirál".



Rozeklaná spirála

- Spirála je v místě dosažení středu rozeklaná, tj. končí ve dvou a více bázových případech.



Rozeklaná spirála

- Spirála je v místě dosažení středu rozeklaná, tj. končí ve dvou a více bázových případech.



Příklad

- Definujte funkci, která pro zadaný seznam vrátí seznam, který vznikne z původního seznamu vynecháním všech prvků na sudých pozicích.
- `oddMembers [1,2,3,4,5,6,7,8] ~>* [1,3,5,7]`
- `oddMembers "Trol ej ej schomoula." ~>* "To je cool."`

Myšlenka a definice

- Rekurzivní volání zkracuje zadaný seznam vždy o dva prvky.
- Krajními případy jsou **prázdný** a **jednoprvkový** seznam.

- `oddMembers :: [a] -> [a]`
`oddMembers [] = []`
`oddMembers (x:[]) = [x]`
`oddMembers (x:y:s) = x : oddMembers s`

Rekurzivní datové struktury

Pozorování

- Pro definici rekurzivních datových struktur (hodnot rekurzivních typů) platí podobná pravidla jako pro definice rekurzivních funkcí.

Opačný směr

- Vytváření hodnot rekurzivního datového typu probíhá od středu pomyslné spirály směrem ven.
- Rekurzivní datová struktura má **základní** (bázovou) **hodnotu**.
- Základní hodnota je rozvíjena **rekurzivním pravidlem**.

Klasický pohled na seznam

- Prázdná, konečná, případně nekonečná posloupnost prvků stejného typu.

Rekurzivní pohled na seznam

- `[]` je **seznam**.
- `(a : seznam)` je **seznam**.

Demonstrace

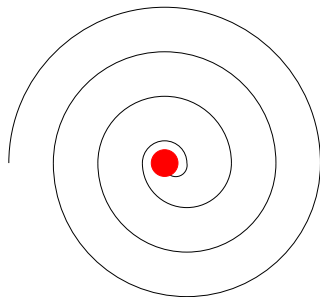
[

`[1] = 1 : []`

`[2,1] = 2 : [1]`

`[3,2,1] = 3 : [2,1]`

`[4,3,2,1] = 4 : [3,2,1]`



Klasický pohled na seznam

- Prázdná, konečná, případně nekonečná posloupnost prvků stejného typu.

Rekurzivní pohled na seznam

- `[]` je **seznam**.
- `(a : seznam)` je **seznam**.

Demonstrace

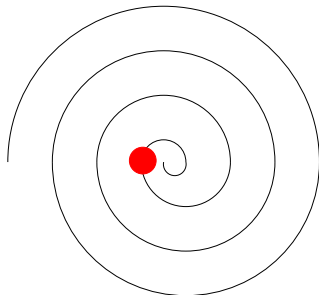
`[]`

`[1] = 1 : []`

`[2,1] = 2 : [1]`

`[3,2,1] = 3 : [2,1]`

`[4,3,2,1] = 4 : [3,2,1]`



Klasický pohled na seznam

- Prázdná, konečná, případně nekonečná posloupnost prvků stejného typu.

Rekurzivní pohled na seznam

- `[]` je **seznam**.
- `(a : seznam)` je **seznam**.

Demonstrace

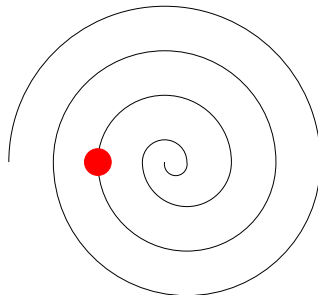
`[]`

`[1] = 1 : []`

`[2,1] = 2 : [1]`

`[3,2,1] = 3 : [2,1]`

`[4,3,2,1] = 4 : [3,2,1]`



Klasický pohled na seznam

- Prázdná, konečná, případně nekonečná posloupnost prvků stejného typu.

Rekurzivní pohled na seznam

- `[]` je **seznam**.
- `(a : seznam)` je **seznam**.

Demonstrace

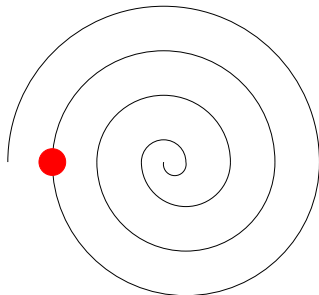
`[]`

`[1] = 1 : []`

`[2,1] = 2 : [1]`

`[3,2,1] = 3 : [2,1]`

`[4,3,2,1] = 4 : [3,2,1]`



Klasický pohled na seznam

- Prázdná, konečná, případně nekonečná posloupnost prvků stejného typu.

Rekurzivní pohled na seznam

- `[]` je **seznam**.
- `(a : seznam)` je **seznam**.

Demonstrace

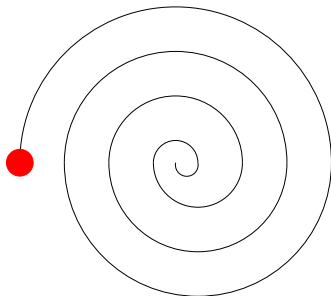
`[]`

`[1] = 1 : []`

`[2,1] = 2 : [1]`

`[3,2,1] = 3 : [2,1]`

`[4,3,2,1] = 4 : [3,2,1]`



Pozorování

- Rekurzivní nahlížení na seznam se může jevit jen jako mentální hříčka.

Stromy jako rekurzivní datové struktury

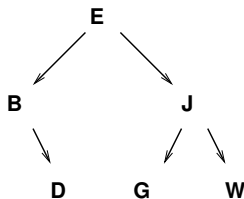
- Mnoho problémů je přirozené řešit s využitím jiné rekurzivně definované datové struktury – **binárního stromu**.
- Nelineární rekurzivní datová struktura.

Rekurzivní definice binárního stromu

- Prázdný strom je **binární strom**
- Hodnota a k ní asociovaný levý a pravý **binární strom** je **binární strom**

Příklad

- Graficky zadaný binární strom.
- E označujeme jako **kořen** stromu
- E, B a J jsou **vnitřní vrcholy** stromu
- D, G a W označujeme jako **listy**
- Levý a pravý binární strom asociovaný s danou hodnotou označujeme jako levý a pravý **podstrom**.
- Binární stromy asociované k hodnotám D, G, W a levý podstrom asociovaný s hodnotou B jsou prázdné stromy.



Definice datového typu `BinTree a`

```
data BinTree a = Empty | Node a (BinTree a) (BinTree a)
```

Příklady hodnot definovaného typu

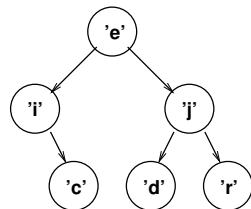
```
tc :: BinTree Char
```

```
tc = Node 'e'
```

```
    (Node 'i' Empty (Node 'c' Empty Empty))
```

```
    (Node 'j' (Node 'd' Empty Empty)
```

```
          (Node 'r' Empty Empty))
```



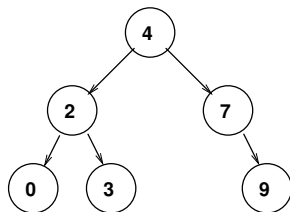
```
tn :: BinTree Int
```

```
tn = Node 4
```

```
    (Node 2 (Node 0 Empty Empty)
```

```
          (Node 3 Empty Empty))
```

```
    (Node 7 Empty (Node 9 Empty Empty))
```



Problém

- Chceme definovat funkci, která při aplikaci na hodnotu typu `BinTree Int` zvýší o jedna všechny hodnoty uložené v uzlech stromu.

Jak takovou funkci definovat?

- Výčtem hodnot nelze – možných hodnot je nekonečně mnoho.

```
treeP1' :: Num a => BinTree a -> BinTree a
treeP1' Empty = Empty
treeP1' (Node x Empty Empty) = Node (x+1) Empty Empty
⋮
```

- **Rekurzivně**, rekurzi vedeme podle struktury stromu

```
treeP1 :: Num a => BinTree a -> BinTree a
treeP1 Empty = Empty
treeP1 (Node x left right)
    = Node (x+1) (treeP1 left) (treeP1 right)
```

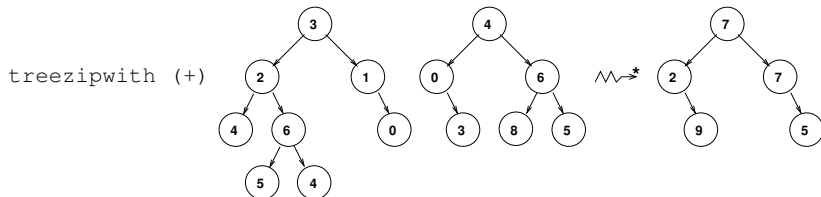
Popis funkce `treezipwith`

- Funkce `treezipwith` pomocí binární operace `op` vytvoří ze dvou stromů nový strom, jehož struktura bude průnikem obou stromů a v jehož uzlech budou výsledky aplikace operace `op` na hodnoty uzlů ze stejné pozice v obou stromech.

Definice funkce treezipwith

- \bullet `treezipwith :: (a -> b -> c) -> BinTree a -> BinTree b -> BinTree c`
`treezipwith op (Node v1 l1 r1) (Node v2 l2 r2)`
 $\quad = \text{Node } (v1 \text{ 'op' } v2) (\text{treezipwith op } l1 \ l2)$
 $\quad \quad \quad (\text{treezipwith op } r1 \ r2)$
`treezipwith _ _ _ = Empty`

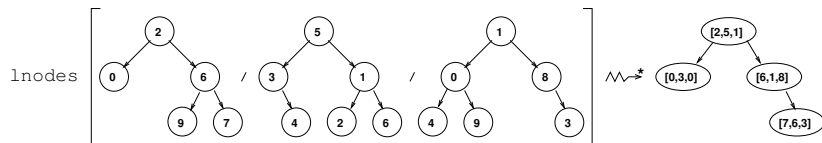
Příklad



Popis funkce lnodes

- Funkce `lnodes` vytvoří ze seznamu stromů jeden strom seznamů, tj. strom, jehož struktura bude průnikem všech stromů ze seznamu a v jehož uzlech budou seznamy hodnot z uzlů na odpovídajících pozicích.

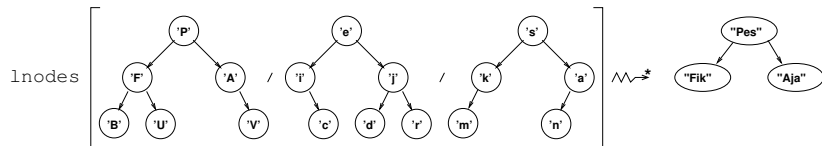
Příklad



Definice funkce lnodes

- `lnodes :: [BinTree a] -> BinTree [a]`
`lnodes = foldr (treezipwith (:)) niltree`
`where niltree = Node [] niltree niltree`

Příklad



Dokazování rekurzivních programů

Fakta

- Ověřování správnosti navržených algoritmů je součástí práce programátora.
- Testování je nedokonalé.
- Správnost algoritmu můžeme prokázat například tím, že ji formálně (= s matematickou přesností) dokážeme.

Důkaz korektnosti algoritmu

- Dokazujeme, že pokud výpočet algoritmu na platných vstupech skončí, tak algoritmus vrací korektní výsledek. O algoritmu, který má tuto vlastnost říkáme, že je **částečně správný**.
- Pokud je algoritmus částečně správný a dokážeme, že na platných vstupech svůj výpočet vždy skončí, pak říkáme, že algoritmus je **úplně správný**.

Pozorování

- Pro důkazy částečné správnosti i terminace rekurzivních funkcí se používá **matematická indukce**.

Matematická indukce

- Matematická indukce je metoda dokazování tvrzení, která se používá, pokud chceme ukázat, že dané tvrzení platí pro všechny prvky dobře založené rekurzivně definované nekonečné posloupnosti. (Jako jsou například přirozená čísla.)

Princip matematické indukce

- Ukážeme platnost tvrzení pro bázovou hodnotu.
- Ukážeme, že tvrzení se přenáší při aplikaci rekurzivního kroku.

$$\underline{T(0)} \text{ a } \underline{T(i) \Rightarrow T(i+1)} \implies T(0), T(1), T(2), \dots$$

Pozorování

- Klíčovým problémem při použití matematické indukce je identifikace toho, podle čeho má být indukce vedena.
- Napovědět může místo rekurzivního volání funkce, neboť rekurse a matematická indukce spolu úzce souvisí.

Příklad

- Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla x a y taková, že $x > 0$ platí, že funkce `fpow` aplikovaná na argumenty x a y vrátí hodnotu x^y .
- `fpow :: Integer -> Integer -> Integer`
`fpow x 0 = 1`
`fpow x y = x * fpow x (y-1)`

Pozorování

- Klíčovým problémem při použití matematické indukce je identifikace toho, podle čeho má být indukce vedena.
- Napovědět může místo rekurzivního volání funkce, neboť rekurse a matematická indukce spolu úzce souvisí.

Příklad

- Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla x a y taková, že $x > 0$ platí, že funkce `fpow` aplikovaná na argumenty x a y vrátí hodnotu x^y .
- `fpow :: Integer -> Integer -> Integer`
`fpow x 0 = 1`
`fpow x y = x * fpow x (y-1)`
- **Důkaz povedeme indukcí vzhledem k hodnotě y .**

Bázový krok, T(0)

- Necht $y=0$, a necht x je libovolné.
- x^y se redukuje dle $x^0 = 1$ na hodnotu 1 .
- $x^0 = 1$, pro libovolné x .
- Tudíž pro $y = 0$ tvrzení platí.

Indukční krok, $T(i) \Rightarrow T(i+1)$

- Dokazujeme, že pokud tvrzení platí pro hodnotu i , pak tvrzení platí i pro hodnotu $i + 1$. Platnost tvrzení pro hodnotu i se označuje jako **indukční předpoklad**.
- Platnost tvrzení pro hodnotu i říká, že $\text{fpow } x \ i \rightsquigarrow^* x^i$ pro libovolnou hodnotu x .
- $\text{fpow } x \ (i+1)$
 - $\rightsquigarrow x * \text{fpow } x \ (i+1-1)$
 - $\rightsquigarrow x * \text{fpow } x \ i \stackrel{\text{dleIP}}{=} x * x^i$
 - $\rightsquigarrow x^{i+1}$
- Ukázali jsme, že pokud tvrzení platí pro i , pak platí i pro $i + 1$.
- Z platnosti báze a vlastností matematické indukce plyne, že pro libovolnou hodnotu x tvrzení platí pro všechny hodnoty y .

Věta 1

- Jsou-li s , t dva konečné seznamy stejného typu a délek, pak

$$\text{length } (s ++ t) = (\text{length } s) + (\text{length } t).$$

- Důkaz veden indukcí podle délky seznamu s .

Věta 2

- Pro každé tři seznamy s , t , u platí rovnost

$$(s ++ t) ++ u = s ++ (t ++ u).$$

- Důkaz veden indukcí podle délky seznamu s .

Věta 3

- Pro každý seznam s a celé číslo $m \geq 0$ platí

$$\text{take } m \ s ++ \text{drop } m \ s = s.$$

- Důkaz veden indukcí podle m .

Měřítko “vzdálenosti” rekurze

- Jaká vlastnost čísla x určuje hloubku rekurze při volání následující funkce?

```
f1 x = if (odd x) then x else f1 (x 'div' 2)
```