Programy a algoritmy pracující s čísly

IB111 Úvod do programování skrze Python

2015

Rozcvička

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$$

Připomenutí z minule

- proměnné, výrazy, operace
- řízení výpočtu: if, for, while
- funkce
- příklady: faktoriál, binární čísla, hádanka

Dnešní přednáška

- práce s čísly v Pythonu
- ukázky programů, ilustrace použití základních konstrukcí
- ukázky jednoduchých algoritmů, ilustrace rozdílu v efektivitě

Číselné typy

- `int` – celá čísla
- `float`
  - čísla s plovoucí desetinnou čárkou
  - reprezentace: báze, exponent
  - nepřesnosti, zaokrouhlování
- (`complex` – komplexní čísla)

Nepřesnosti

Přesná matematika:

$$((1 + \frac{1}{x}) - 1) \cdot x = 1$$

Nepřesné počítače:

```
>>> x = 2**50
>>> ((1 + 1.0 / x) - 1) * x
1.0
>>> x = 2**100
>>> ((1 + 1.0 / x) - 1) * x
0.0
```

Číselné typy – poznámky

- dělení: rozdíl `3/2` a `3/2.0`
- explicitní přetypování: `int(x)`, `float(x)`
- automatické „nafukování“ typu `int` (`long`):
  - viz např. `2**100`
  - pomalejší, ale korektní
  - rozdíl od většiny jiných prog. jazyků (běžné je „přetečení“)

Pokročilejší operace s čísly

Některé operace v knihovně `math`:

- zaokrouhlování: `round`, `math.ceil`, `math.floor`
- absolutní hodnota: `abs`
- `math.exp`, `math.log`, `math.sqrt`
- goniometrické funkce: `math.sin`, `math.cos`, `...`
- konstanty: `math.pi`, `math.e`

použití knihovny: `import math`

Ciferný součet

- vstup: číslo x
- výstup: ciferný součet čísla x
- příklady:
  - $8 \to 8$
  - $15 \to 6$
  - $297 \to 18$
  - $11211 \to 6$

Ciferný součet: základní princip

opakovaně provádíme:

- dělení 10 se zbytkem – hodnota poslední cifry
- celočíselné dělení – „okrajování“ čísla

Ciferný součet – nevhodná pasáž

```
if n % 10 == 0:
    f = 0 + f
elif n % 10 == 1:
    f = 1 + f
elif n % 10 == 2:
    f = 2 + f
elif n % 10 == 3:
    f = 3 + f
elif n % 10 == 4:
    f = 4 + f
...
```

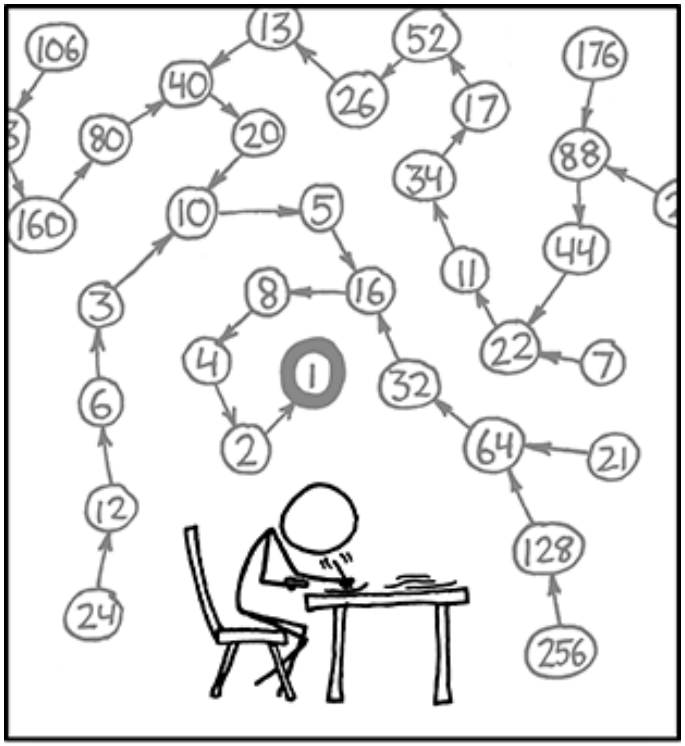
Ciferný součet – řešení

```
def ciferny_soucet(n):
    soucet = 0
    while n > 0:
        soucet += n % 10
        n = n / 10
    return soucet
```

Collatzova posloupnost

- vezmi přirozené číslo:
  - pokud je sudé, vyděl jej dvěma
  - pokud je liché, vynásob jej třemi a přičti jedničku
- tento postup opakuj, dokud nedostaneš číslo jedna

Collatzova posloupnost: xkcd



THE COLLATZ CONJECTURE STATES THAT IF YOU PICK A NUMBER, AND IF IT'S EVEN DIVIDE IT BY TWO AND IF IT'S ODD MULTIPLY IT BY THREE AND ADD ONE, AND YOU REPEAT THIS PROCEDURE LONG ENOUGH, EVENTUALLY YOUR FRIENDS WILL STOP CALLING TO SEE IF YOU WANT TO HANG OUT.

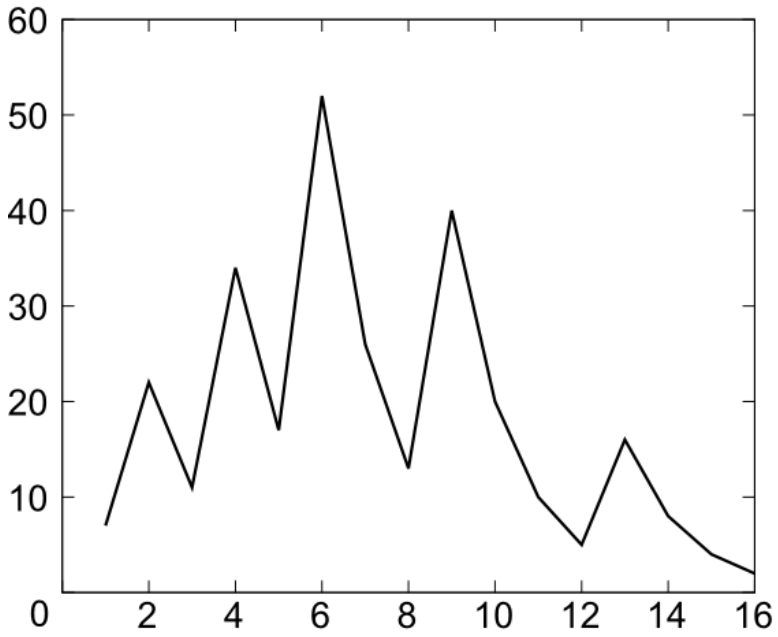
https://xkcd.com/710/

Collatzova posloupnost: výpis

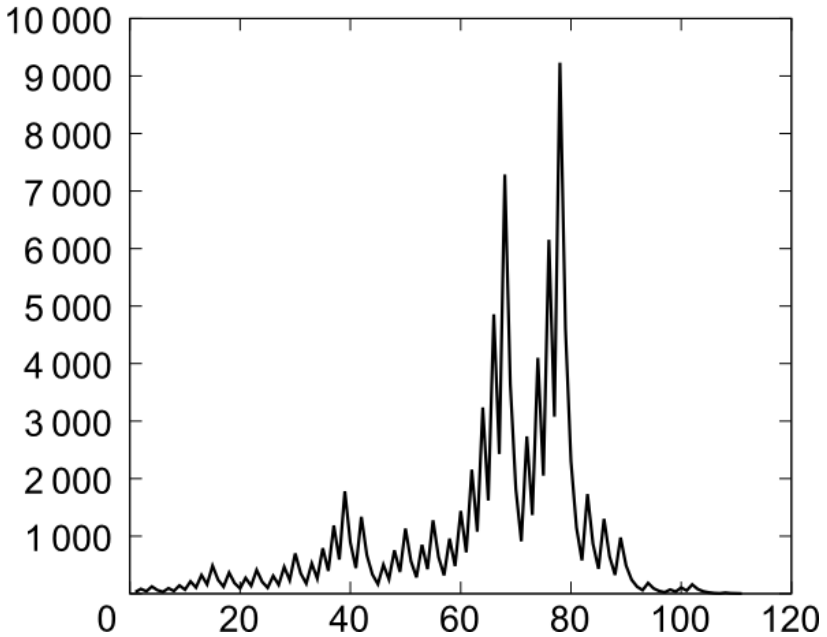
```
def collatz_vypis(n):
    while n != 1:
        print n,
        if n % 2 == 0:
            n = n / 2
        else:
            n = 3*n + 1
    print 1
```

Collatzova posloupnost: příklady graficky

začínající číslem 7



začínající číslem 27



Bonus: Vykreslení grafu v Pythonu

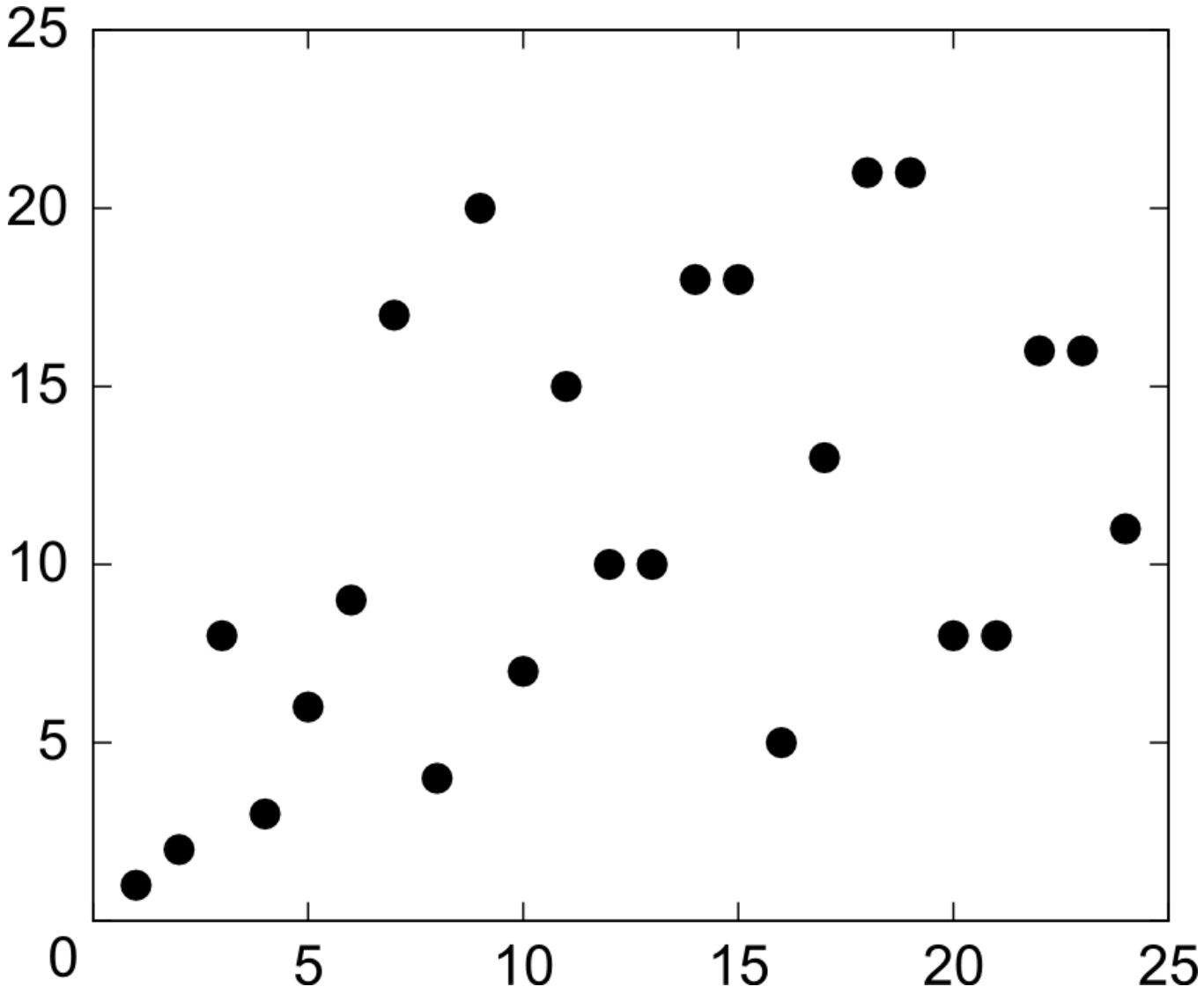
Využívá seznamy a knihovnu `pylab`

```
import pylab

def collatz(n):
    posloupnost = []
    while n != 1:
        posloupnost.append(n)
        if n % 2 == 0:
            n = n / 2
        else:
            n = 3*n + 1
    posloupnost.append(1)
    return posloupnost

pylab.plot(collatz(7))
pylab.show()
```

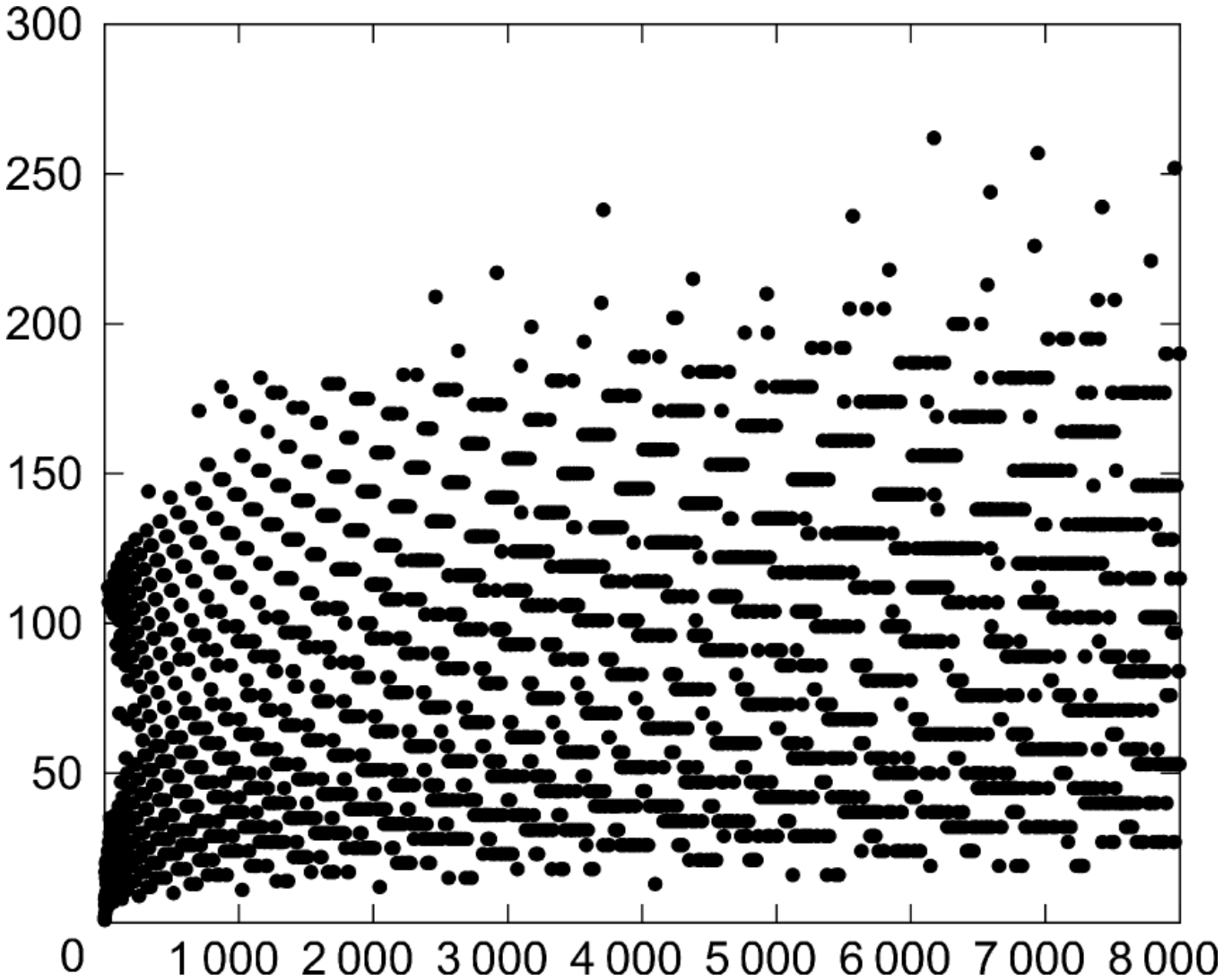
Collatzova posloupnost: délka posloupnosti

```
def collatz_delka(n):
    delka = 1
    while n != 1:
        if n % 2:
            n = 3*n + 1
        else:
            n = n / 2
        delka += 1
    return delka

def collatz_tabulka(kolik):
    for i in range(1, kolik+1):
        print i, collatz_delka(i)
```

Collatzova posloupnost: délka posloupnosti I



Collatzova posloupnost: délka posloupnosti II



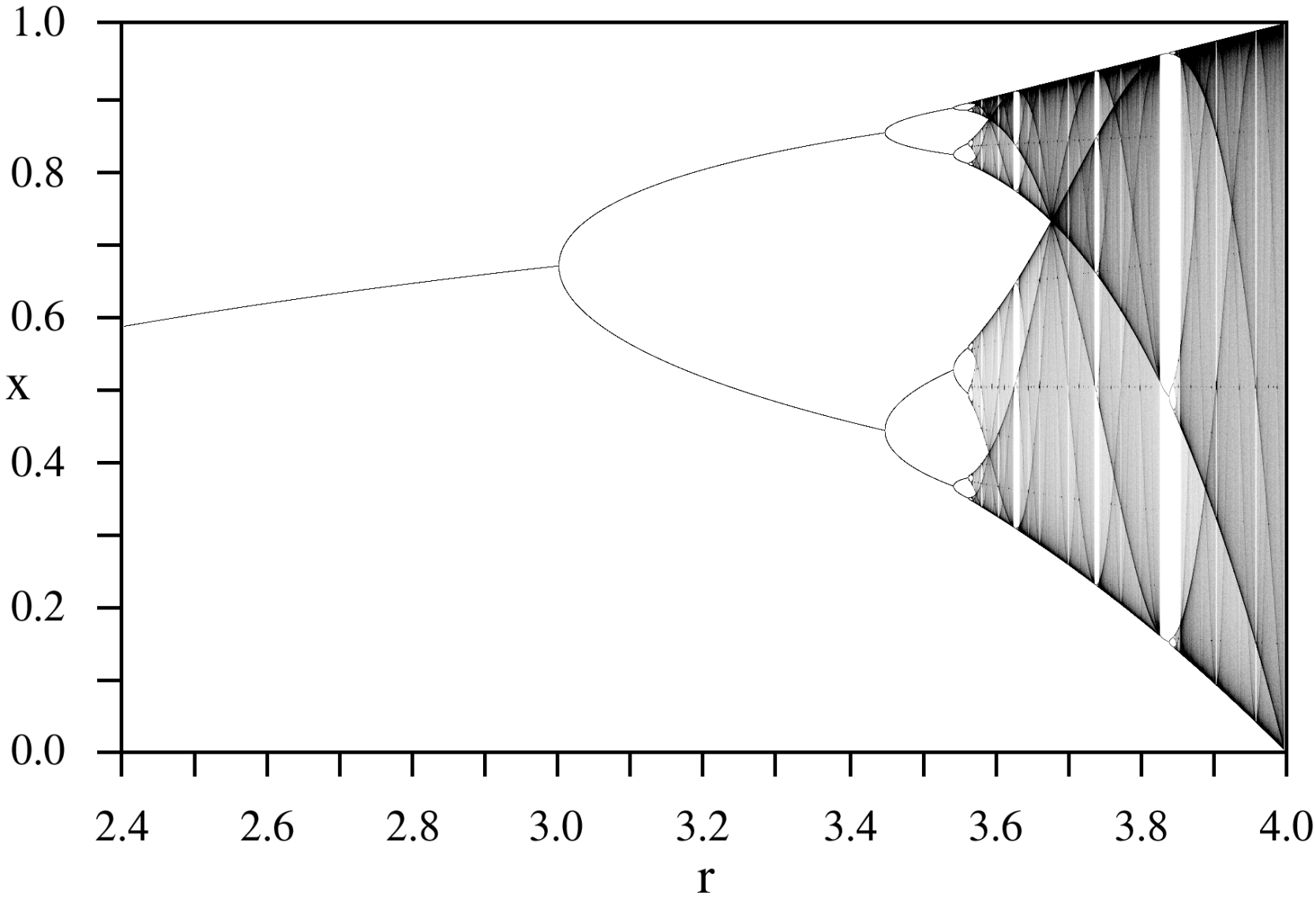
Collatzova hypotéza

- Hypotéza: Pro každé počáteční číslo n, posloupnost narazí na číslo 1.
- experimentálně ověřeno pro velká n ($\sim 10^{18}$)
- důkaz není znám

Logistická diferenční rovnice

$$x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

- jednoduchý úkol: výpis členů posloupnosti
- chaotické chování – citlivost k počátečním podmínkám (viz ukázka)
- zajímavé souvislosti: modelování populací, chaos, fraktály



Zdroj: Wikipedia

Největší společný dělitel

- vstup: přirozená čísla a, b
- výstup: největší společný dělitel a, b
- příklad: 180, 504

Jak na to?

Naivní algoritmus I

- projít všechny čísla od 1 do $min(a, b)$
- pro každé vyzkoušet, zda dělí a i b
- vzít největší

Naivní algoritmus II

- „školní“ algoritmus
- najít všechny dělitele čísel a, b
- projít dělitele, vybrat společné, vynásobit
- příklad:
  - $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
  - $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
  - $NSD = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

Euklidův algoritmus: základ

základní myšlenka: pokud $a > b$, pak:

$$NSD(a, b) = NSD(a - b, b)$$

příklad:

krok	a	b
1	504	180
2	324	180
3	180	144
4	144	36
5	108	36
6	72	36
7	36	36
8	36	0

Operace modulo

- modulo = zbytek po dělení
- příklady:
  - $13 \bmod 5 = 3$
  - $28 \bmod 4 = 0$
  - $14 \bmod 3 = 2$
  - $18 \bmod 7 = ??$
  - $29 \bmod 13 = ??$

Euklidův algoritmus: vylepšení

vylepšená základní myšlenka: pokud $a > b$, pak:

$$NSD(a, b) = NSD(a \ mod \ b, b)$$

krok	a	b
1	504	180
2	180	144
3	144	36
4	36	0

Euklidův algoritmus: program

varianta s odčítáním, bez rekurze

```
def nsd(a,b):
    if a == 0:
        return b
    while b != 0:
        if a > b:
            a = a - b
        else:
            b = b - a
    return a
```

Euklidův algoritmus: program

modulo varianta, rekurzivně

```
def nsd(a,b):
    if b == 0:
        return a
    else:
        return nsd(b, a % b)
```

Příklady

- 160, 75
- 57, 33

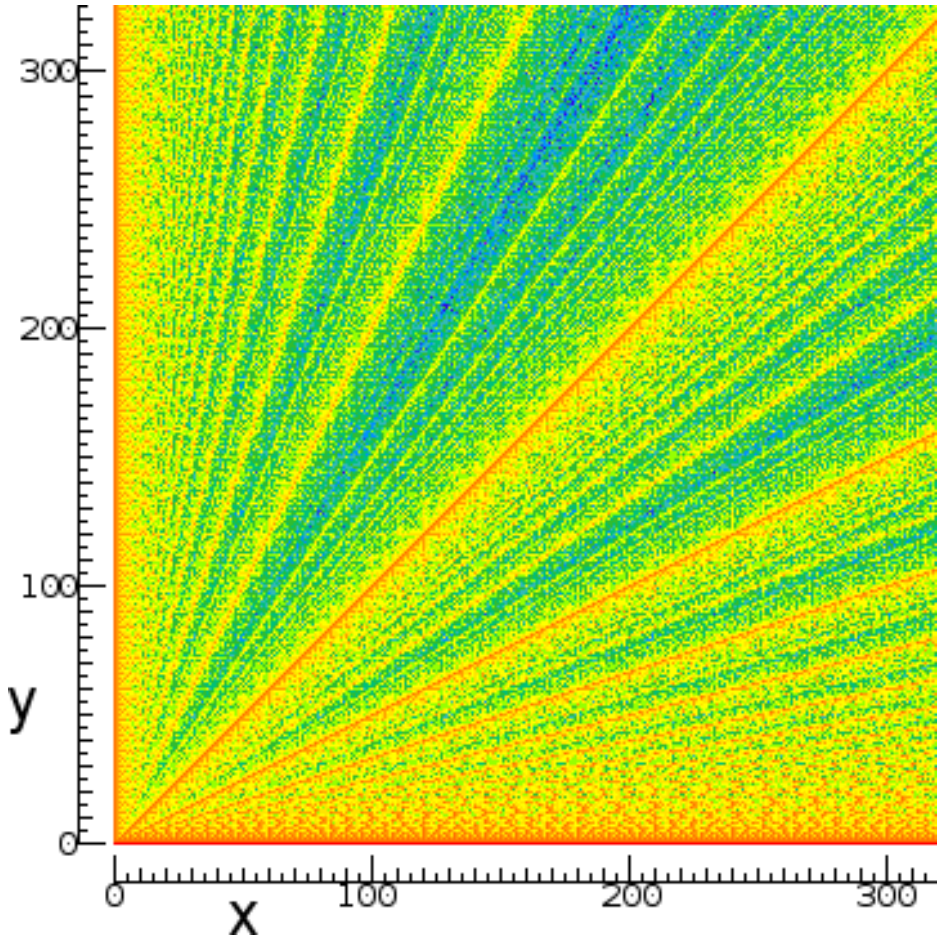
Příklad I – řešení

krok	*a*	*b*
1	160	75
2	75	10
3	10	5
4	5	0

Efektivita algoritmů

- proč byly první dva algoritmy označeny jako „naivní“?
- časová náročnost algoritmu:
  - naivní: exponenciální vůči počtu cifer
  - Euklidův: lineární vůči počtu cifer
- různé algoritmy se mohou výrazně lišit svou efektivností
- často rozdíl použitelné vs nepoužitelné
- více později (a v dalších předmětech)

Euklidův algoritmus – vizualizace



http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm

Výpočet odmocniny

- vstup: číslo x
- výstup: přibližná hodnota $\sqrt{x}$

Jak na to?

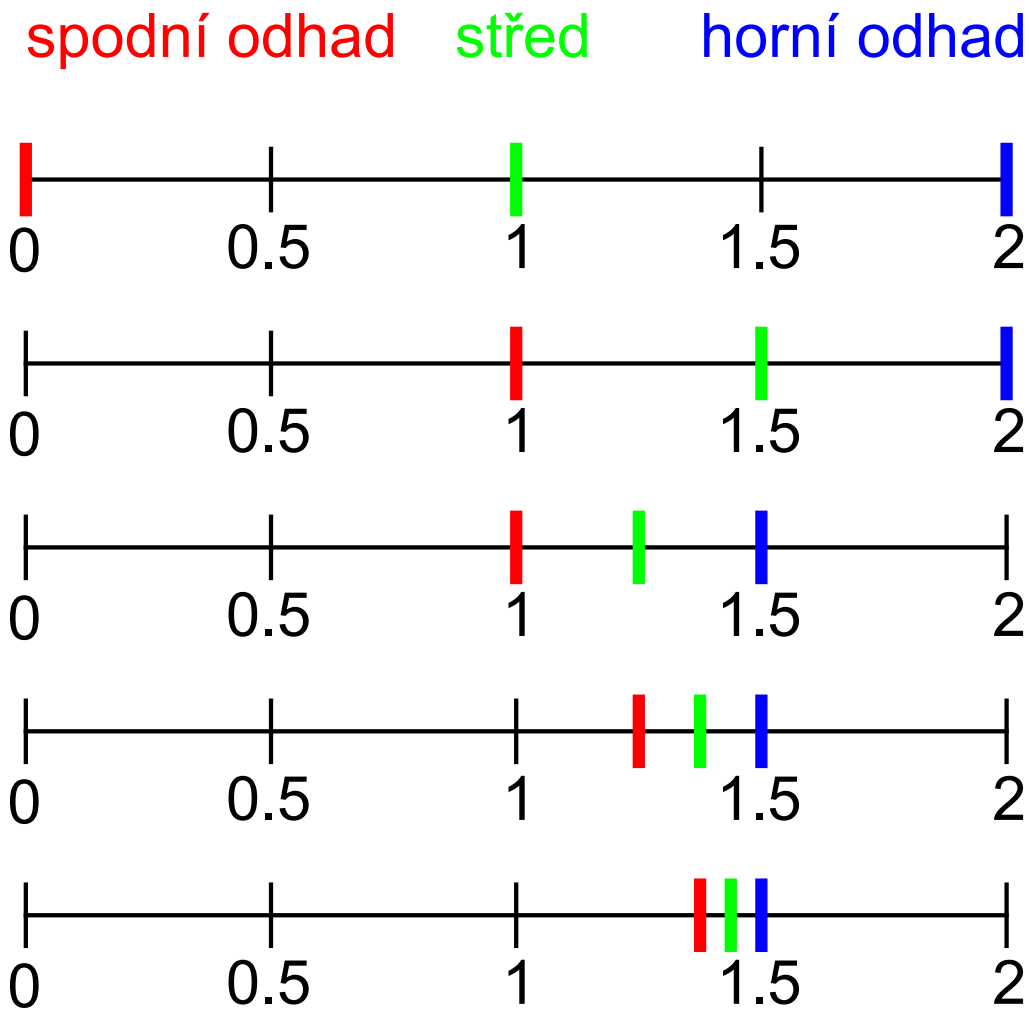
Výpočet odmocniny

- vstup: číslo x
- výstup: přibližná hodnota $\sqrt{x}$

Jak na to?

Mnoho metod, ukázka jedné z nich (rozhodně ne nejvíce efektivní)

Výpočet odmocniny: binární půlení



Výpočet odmocniny: binární půlení

```
def odmocnina(x, presnost = 0.01):
    horni_odhad = x
    spodni_odhad = 0
    stred = (horni_odhad + spodni_odhad) / 2.0
    while abs(stred**2 - x) > presnost:
        if stred**2 > x:
            horni_odhad = stred
        if stred**2 < x:
            spodni_odhad = stred
        stred = (horni_odhad + spodni_odhad) / 2.0
    return stred
```

Výpočet odmocniny – poznámky

- Funguje korektně jen pro čísla ≥ 1.
- Co program udělá pro čísla < 1?
- Proč?
- Jak to opravit?

Vsuvka: Obecný kontext

problém

$\Downarrow$

algoritmus

$\Downarrow$

program

$\Downarrow$

ladění

Poznámka o ladění

- laděním se nebudeme (na přednáškách) příliš zabývat
- to ale neznamená, že není důležité...

Ladění je dvakrát tak náročné, jak psaní vlastního kódu. Takže pokud napíšete program tak chytře, jak jen umíte, nebudete schopni jej odladit. (Brian W. Kernighan)

Postřeh k ladění

Do průšvihu nás nikdy nedostane to, co nevíme. Dostane nás tam to, co víme příliš jistě a ono to tak prostě není. (Y. Berry)

Ladění

- ladící výpisy
  - např. v každé iteraci cyklu vypisujeme stav proměnných
  - doporučeno vyzkoušet na ukázkových programech ze slidů
- použití debuggeru
  - dostupný přímo v IDLE
  - sledování hodnot proměnných, spuštěných příkazů, breakpointy, ...
  - více: cvičení, pozdější přednáška

Součet druhých mocnin

- Lze zapsat zadané číslo jako součet druhých mocnin?
- Příklad: $13 = 2^2 + 3^2$
- Která čísla lze zapsat jako součet druhých mocnin?

Součet druhých mocnin: řešení I

```
def soucet_ctvercu(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i**2 + j**2 == n:
                print n, "=", i**2, "+", j**2
```

- Program je zbytečně neefektivní. Proč?
- Výpis čísel, která lze zapsat jako součet čtverců

Součet druhých mocnin: řešení II

```
def je_druha_mocnina(n):
    odmocnina = int(n**0.5)
    return odmocnina**2 == n

def soucet_ctvercu(n):
    for i in range(int(n**0.5) + 1):
        zbytek = n - i**2
        if je_druha_mocnina(zbytek):
            return True
    return False

def vypis_soucty_ctvercu(kolik):
    for i in range(kolik):
        if soucet_ctvercu(i):
            print i,
```

Podobné náměty

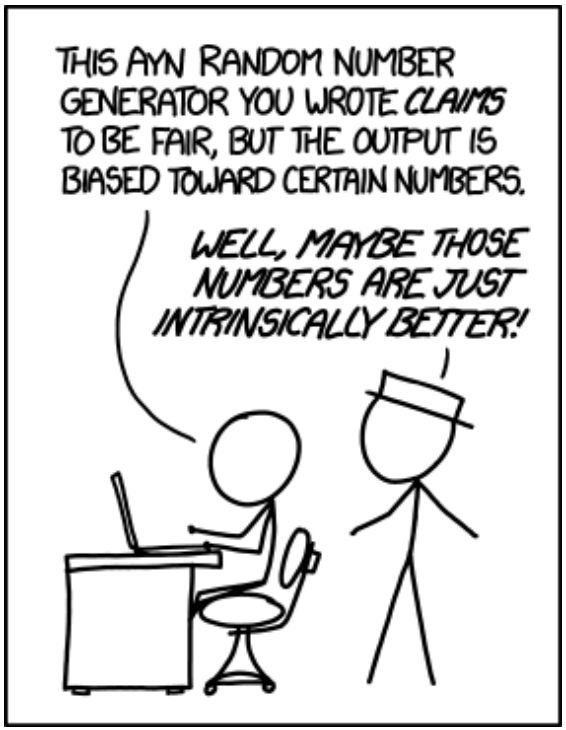
- variace: součet tří druhých mocnin, součet dvou třetích mocnin, ...
- další náměty na posloupnosti: *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://oeis.org/`

Náhodná čísla

- přesněji: *pseudo-náhodná* čísla
- opravdová náhodná čísla: `http://www.random.org/`
- bohaté využití v programování: výpočty, simulace, hry, ...
- Python
  - `import random`
  - `random.random()` – float od 0 do 1
  - `random.randint(a,b)` – celé číslo mezi `a`, `b`
  - mnoho dalších funkcí

Náhodná čísla: xkcd

```
int getRandomNumber()
{
    return 4;  // chosen by fair dice roll.
               // guaranteed to be random.
}
```



https://xkcd.com/221/
https://xkcd.com/1277/

Náhodná čísla: průměr vzorku

Vygenerujeme soubor náhodných čísel a vypočítáme průměrnou hodnotu:

```
def prumer_nahodnych(kolik, maximum = 100):
    soucet = 0.0
    for i in range(kolik):
        soucet += random.randint(0, maximum)
    return soucet / kolik
```

Jakou očekáváme hodnotu na výstupu? Jak velký bude rozptyl hodnot? (Názorná ukázka *centrální limitní věty*)

Simulace volebního průzkumu

- volební průzkumy se často liší; jaká je jejich přesnost?
- přístup 1: matematické modely, statistika
- přístup 2: simulace
- program:
  - vstup: reálné preference stran, velikost vzorku
  - výstup: preference zjištěné v náhodně vybraném vzorku

Simulace volebního průzkumu

```
def pruzkum(vzorek, pref1, pref2, pref3):
    pocet1 = 0
    pocet2 = 0
    pocet3 = 0
    for i in range(vzorek):
        r = random.randint(1,100)
        if r <= pref1: pocet1 += 1
        elif r <= pref1 + pref2: pocet2 += 1
        elif r <= pref1 + pref2 + pref3: pocet3 += 1
    print "Strana 1:", 100.0 * pocet1 / vzorek
    print "Strana 2:", 100.0 * pocet2 / vzorek
    print "Strana 3:", 100.0 * pocet3 / vzorek
```

Poznámky ke zdrojovému kódu

- uvedené řešení není dobré:
  - „copy & paste“ kód
  - funguje jen pro 3 strany
- lepší řešení – využití seznamů

Výpočet π

- $\pi = 3.14159265359\ldots$
- Ale jak se na to přišlo?
- Jak vypočítat π?

Výpočet π

Příklady naivních metod:

- Gregoryho-Leibnizova řada:

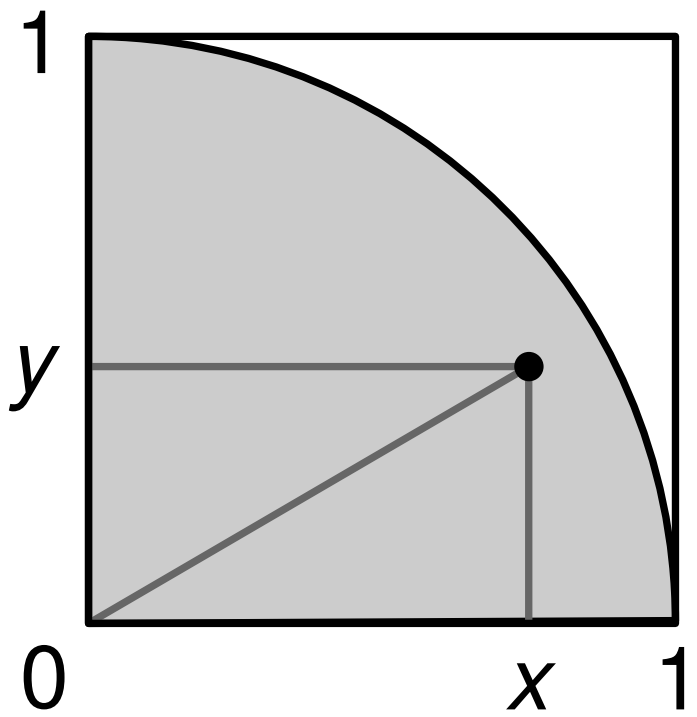
$$\pi = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \cdots$$

- Monte Carlo metoda – házení šipek do čtvrtdisku, Buffonova jehla

Výpočet π – Gregory-Leibniz

```
def gregory_leibniz(n):
    soucet = 0.0
    znamenko = 1.0
    for k in range(1,n+1):
        soucet += znamenko/(2*k-1)
        znamenko *= -1
    return 4*soucet
```

Výpočet π – Monte Carlo

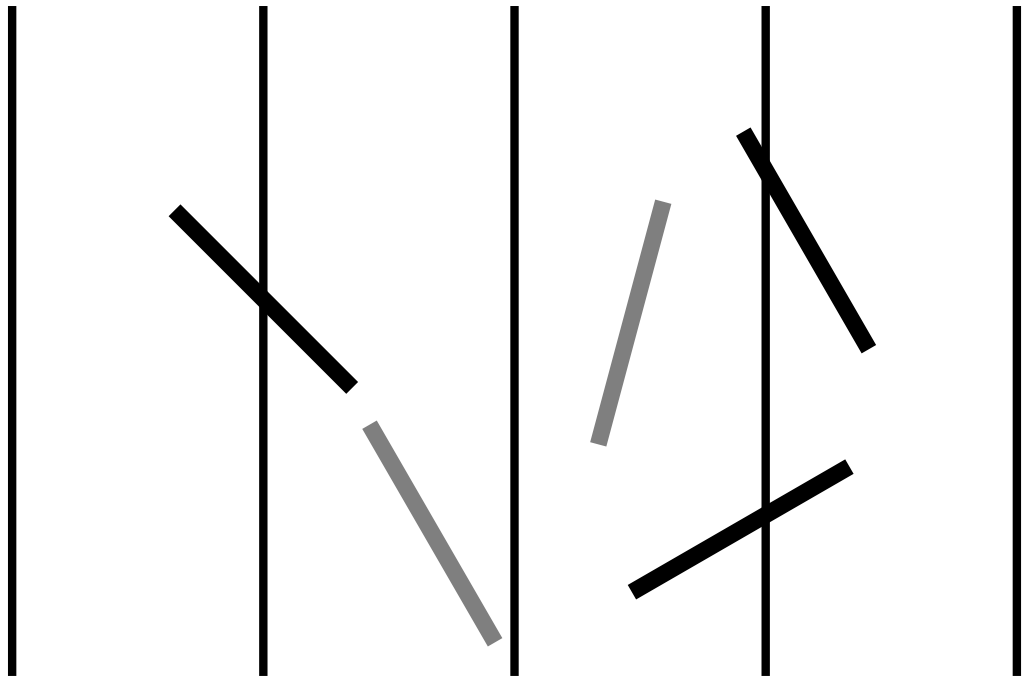


- obsah čtvrtdisku: $\pi/4$
- obsah čtverce: 1

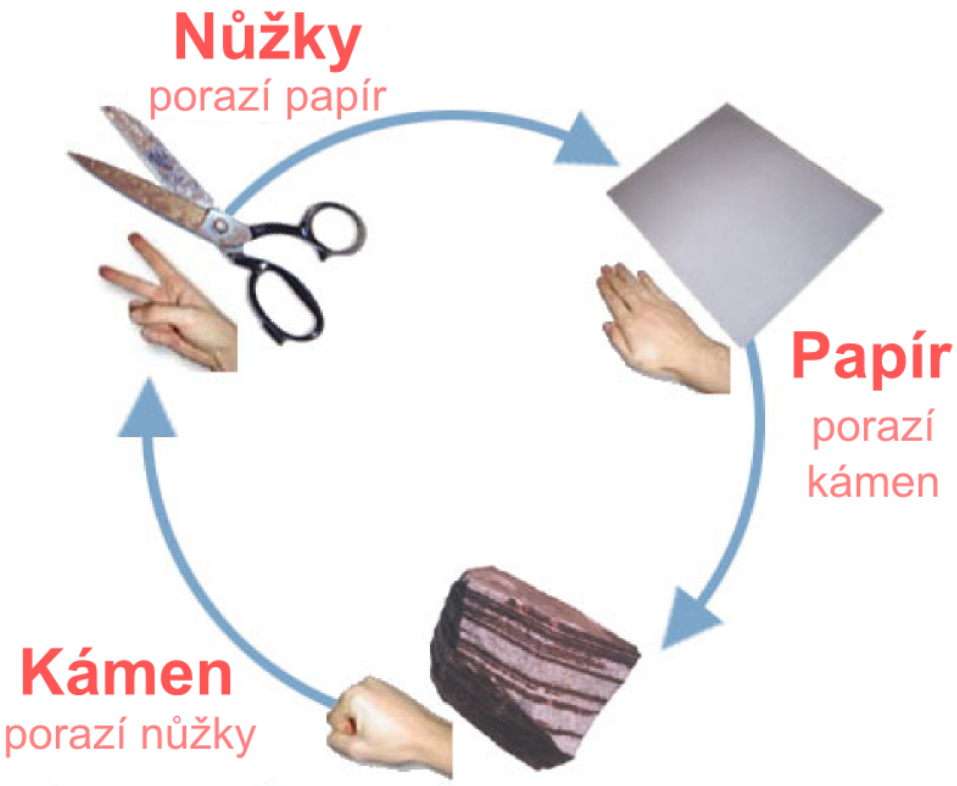
Výpočet π – Monte Carlo

```
def monte_carlo_kruh(pocet_pokusu):
    zasahy = 0
    for k in range(pocet_pokusu):
        x = random.random()
        y = random.random()
        if x*x + y*y < 1:
            zasahy += 1
    return 4.0 * zasahy / pocet_pokusu
```

Buffonova jehla



Kámen, nůžky, papír



http://cs.wikipedia.org/wiki/Kámen,_nůžky,_papír

KNP: strategie

```
def strategie_rovnomerna():
    r = random.randint(1,3)
    if r == 1:
        return "K"
    elif r == 2:
        return "N"
    else:
        return "P"

def strategie_kamen():
    return "K"
```

KNP: vyhodnocení tahu

```
def vyhodnot(tah1, tah2):
    if tah1 == tah2:
        return 0
    if tah1 == "K" and tah2 == "N" or \
       tah1 == "N" and tah2 == "P" or \
       tah1 == "P" and tah2 == "K":
        return 1
    return -1
```

KNP: sehrání západu

```
def knp_hra(pocet_kol):
    body = 0
    for i in range(1, pocet_kol+1):
        print "Kolo ", i
        tah1 = strategie_rovnomerna()
        tah2 = strategie_rovnomerna()
        print "Tahy hracu:", tah1, tah2
        body += vyhodnot(tah1, tah2)
        print "Body hrace 1:", body
```

KNP: obecnější strategie

```
def strategie(vahaK, vahaN, vahaP):
    r = random.randint(1, vahaK + vahaN + vahaP)
    if r <= vahaK:
        return "K"
    elif r <= vahaK + vahaN:
        return "N"
    else:
        return "P"
```

KNP: rozšiřující náměty

- turnaj různých strategií
- strategie pracující s historií
  - kopírování posledního tahu soupeře
  - analýza historie soupeře (hraje vždy kámen? $\rightarrow$ hraj papír)
- rozšíření na více symbolů (Kámen, nůžky, papír, ještěr, Spock)

Shrnutí

- operace s čísly, náhoda
- ukázky programů
- ukázky algoritmů, efektivita

Příště: Seznamy, řetězce a trocha šifer