Matematika III – 1. týden
Funkce více proměnných: parciální derivace, křivky, topologie euklidovských prostorů

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

21. 9. 2015

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`

Plán přednášky

Definition

Zobrazení $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *funkce více proměnných*. Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z.

To znamená, že funkce f definovaná v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

a podobně v „prostoru“ $E_3 = \mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Definition

Zobrazení $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *funkce více proměnných*. Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z.
To znamená, že funkce f definovaná v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

a podobně v „prostoru“ $E_3 = \mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována.

(Hříčkou pro písemky a úlohy bývá úkol k danému explicitnímu výrazu definujícímu funkci najít co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definition

Graf funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definová vztahem

$$G_f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n));\ (x_1, \ldots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor f.

Definition

Graf funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definová vztahem

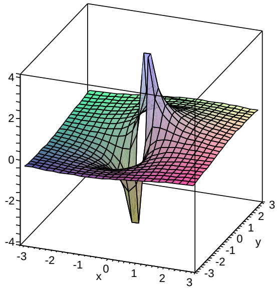
$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n));\ (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor f.

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku, maximálním definičním oborem je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Parciální derivace

S nástroji pro funkce v jedné proměnné můžeme beze změn pracovat i teď. Prostě budeme derivovat, případně integrovat apod. jen podle jedné zvolené proměnné, zatímco ostatní budou považovány za parametry. (Máme přitom i k dispozici řadu výsledků o chování derivací a integrálů v závislosti na parametrech.)

Definition

Parciální derivací $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n)$ funkce f v bodě $(x_1, \dots, x_n)$ rozumíme obvyklou derivaci $\frac{d}{dx_i} f$ funkce jedné proměnné $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, ve které považujeme ostatní proměnné za parametry.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$. Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$. Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na $\mathbb{R}^n$ standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, kde $u = (x_1, \ldots, x_n)$ a $v = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou libovolné vektory.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$. Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na $\mathbb{R}^n$ standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory. Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|P - Q\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|P - Q\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q. Např. E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_1 - P_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$. Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na $\mathbb{R}^n$ standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.
Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|P - Q\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|P - Q\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q.
Např. E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_1 - P_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Trojúhelníková nerovnost pro každé tři body P, Q, R

$$\|P - R\| = \|(P - Q) + (Q - R)\| \leq \|(P - Q)\| + \|(Q - R)\|.$$

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,
- *hromadný bod P množiny $A \subset E_n$*: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,
- *hromadný bod P množiny $A \subset E_n$*: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P,
- *uzavřená množina*: obsahuje všechny své hromadné body,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,
- *hromadný bod P množiny $A \subset E_n$*: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P,
- *uzavřená množina*: obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina*: její doplněk je uzavřený,

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,
- *hromadný bod P množiny $A \subset E_n$*: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P,
- *uzavřená množina*: obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina*: její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P*: množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,

Definition

- *hraniční bod* P *množiny* A: každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,

Definition

- *hraniční bod P množiny A*: každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A*: existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,

Definition

- *hraniční bod P množiny A*: každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A*: existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,
- *ohraničená množina*: leží celá v nějakém δ–okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),

Definition

- *hraniční bod P množiny A*: každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A*: existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,
- *ohraničená množina*: leží celá v nějakém δ–okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),
- *kompaktní množina*: uzavřená a ohraničená množina.

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
4. *A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
4. *A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*
5. *A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.*

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$

Všimněme si, že zatímco limity existují v $\mathbb{E}_n$, derivace křivky v $\mathbb{E}_n$ je ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$, integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$!

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{|t - t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$

Všimněme si, že zatímco limity existují v $\mathbb{E}_n$, derivace křivky v $\mathbb{E}_n$ je ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$, integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$!

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{|t - t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál:* $\int_a^b c(t)dt \in \mathbb{R}^n$.

Všimněme si, že zatímco limity existují v $\mathbb{E}_n$, derivace křivky v $\mathbb{E}_n$ je ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$, integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$!

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{|t - t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál:* $\int_a^b c(t)dt \in \mathbb{R}^n$.

Všimněme si, že zatímco limity existují v $\mathbb{E}_n$, derivace křivky v $\mathbb{E}_n$ je ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$, integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$!

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{|t - t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál:* $\int_a^b c(t)dt \in \mathbb{R}^n$.

Všimněme si, že zatímco limity existují v $\mathbb{E}_n$, derivace křivky v $\mathbb{E}_n$ je ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$, integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$!
Limity, derivace i integrály lze spočíst po jednotlivých n souřadných složkách v $\mathbb{R}^n$ a stejně se rozpozná i jejich existence.

Derivace křivky a tečna ke křivce

Derivace zadává **tečný vektor** ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T : \; c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je **tečna ke křivce** c v bodě t_0, nezávisí na parametrizaci křivky c.