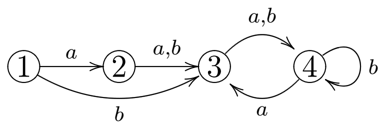
Algebra I – podzim 2015 – 2. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda množina
$$S = \{\, f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid z \text{ dělí } f(z) \text{ pro všechna } z \in \mathbb{Z} \,\}$$
je podokruhem, respektive ideálem, okruhu $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$, kde $+$ a $\cdot$ jsou obvyklé operace sčítání a násobení funkcí.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} q & 0 \\ a + b\,\mathrm{i} & q \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} q & 0 \\ a + a\,\mathrm{i} & q \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{Q},\ q > 0,\ a \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Rozložte polynom $x^7 + x^6 - x^5 - 3x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 20x + 4$ na součin nerozložitelných polynomů nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$, víte-li, že má kořen $1 - \sqrt[3]{2}$ a dvojnásobný kořen $\mathrm{i} - 1$.

5. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 2$ nad $\mathbb{Q}$.

6. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo $\frac{1}{\alpha^2 - \alpha + 1}$, kde α je kořen polynomu $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

7. **(5 bodů)** Dejte příklad grupy $(G, \cdot)$ a tří různých podgrup grupy $(G, \cdot) \times (G, \cdot)$, které jsou izomorfní $(G, \cdot)$. Pokud taková grupa neexistuje, zdůvodněte proč.

8. **(5 bodů)** Dejte příklad homomorfismu grup $\varphi\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, který má stejné jádro jako homomorfismus det zobrazující každou regulární matici na její determinant, ale přitom $\varphi \neq \det$. Pokud takový homomorfismus neexistuje, zdůvodněte proč.

9. **(5 bodů)** Dejte příklad grupy, která je generovaná jedním prvkem, a její podgrupy, která jedním prvkem generovaná není. Pokud taková grupa neexistuje, zdůvodněte proč.

10. **(5 bodů)** Definujte okruh polynomů nad daným okruhem.

11. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující normální podgrupy grupy $(G, \cdot)/H$, kde $(G, \cdot)$ je grupa a H je její normální podgrupa.

12. **(5 bodů)** Dokažte, že každý konečný obor integrity je těleso.