

IB015 Neimperativní programování

Funkce vyšších řádů a λ -funkce

Jiří Barnat
Libor Škarvada

Funkce vyšších řádů

Definice

- Funkce, je považována za funkci vyššího řádu, pokud alespoň jeden z jejich argumentů, které funkce má, nebo výsledek, který funkce vrací, je opět funkce.
- Funkce vyššího řádu se též označují jako funkcionály.

Příklady

$(.) :: (a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a) \rightarrow c \rightarrow b$

$\text{map} :: (a \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow [b]$

Pozorování

- Každou funkci, která má alespoň 2 argumenty, lze chápat jako funkci vyššího řádu.

Příklad

- Funkci

$(*) :: \text{Num } a \Rightarrow a \rightarrow a \rightarrow a$

lze číst jako

$(*) :: \text{Num } a \Rightarrow a \rightarrow (a \rightarrow a)$

- Funkci, která bere dva číselné argumenty typu a a vrací hodnotu typu a , lze také chápat jako funkci, která bere hodnotu číselného typu a a vrací hodnotu typu $a \rightarrow a$.

Pozorování

- Chápeme-li n -ární ($n \geq 2$) funkce jako funkce vyššího řádu, lze tyto funkce tzv. **částečně aplikovat**, tj. vyhodnotit je i pro neúplný výčet argumentů.

Příklad

- Uvažme funkci násobení
 - $(*) :: \text{Num } a \Rightarrow a \rightarrow (a \rightarrow a)$
 - $(*) \ x \ y = x*y$
- Výsledkem aplikace $(*)$ na hodnotu 3 je funkce.
 - $(*) \ 3 :: \text{Num } a \Rightarrow a \rightarrow a$
- Tuto funkci je možné označit, a posléze použít.
 - $f = (*) \ 3$
 - $f :: \text{Num } a \Rightarrow a \rightarrow a$
 - $f \ 4 \rightsquigarrow ((*) \ 3) \ 4 \rightsquigarrow 12$

Připomenutí

- Typový konstruktor \rightarrow je binární.
- Typový konstruktor \rightarrow se používá pouze infixově.

Implicitní závorkování

- Typový konstruktor \rightarrow implicitně sdružuje zprava

$f :: a_1 \rightarrow (a_2 \rightarrow (a_3 \rightarrow \dots \rightarrow (a_{n-1} \rightarrow (a_n \rightarrow a)) \dots))$

- Aplikace funkce na argumenty implicitně sdružuje zleva

$(\dots (((f \ x_1) \ x_2) \ x_3) \dots \ x_{n-1}) \ x_n$

Pozorování

- Libovolnou n -ární funkci lze také chápat jako k -ární, kde k nabývá hodnot od 1 do n .

S každou aplikací ubude jeden výskyt \rightarrow v typu výrazu

$(+)$ $:: \text{Num } a \Rightarrow a \rightarrow a \rightarrow a$

$(+) 2$ $:: \text{Num } a \Rightarrow \quad \quad a \rightarrow a$

$((+) 2) 3$ $:: \text{Num } a \Rightarrow \quad \quad \quad a$

S každou aplikací ubude jeden výskyt \rightarrow v typu výrazu

$(+)$ $:: \text{Num } a \Rightarrow a \rightarrow a \rightarrow a$

$(+)$ 2 $:: \text{Num } a \Rightarrow$ $a \rightarrow a$

$((+) 2) 3$ $:: \text{Num } a \Rightarrow$ a

Specializací typové proměnné však mohou \rightarrow přibýt.

- Vezměme například funkci identity

$\text{id} :: a \rightarrow a$

$\text{id } x = x$

- Při aplikaci id na $(+)$ ubude \rightarrow z typu id , tj.

$\text{id } (+) :: a$

- Avšak po specializaci typové proměnné a na typ funkce $(+)$

$\text{id } (+) :: \text{Num } a \Rightarrow a \rightarrow a \rightarrow a$

Částečná aplikace

- Má-li funkce více formálních parametrů částečná aplikace probíhá vždy od parametru nejvíce vlevo.

Problém

- Funkci nelze přímo částečně aplikovat na jiný než první parametr.

Funkce `flip`

- Při aplikaci na binární funkci tuto funkci modifikuje tak, aby své dva argumenty přijímala v obráceném pořadí.

```
flip :: ( a -> b -> c ) -> b -> a -> c
flip f x y = f y x
```

- Funkci `flip` je třeba chápat jako **modifikátor funkce**, ne jako prohazovačku parametrů!

Příklady

```
(-) 3 4 ~> -1
```

```
flip (-) 3 4 ~> 1
```

```
(-) flip 3 4 ~> ERROR
```

Příklad

- Pomocí částečné aplikace funkce `(-)` definujte novou funkci `minus4`, která při aplikaci na číselnou hodnotu vrátí hodnotu o 4 menší.

Řešení

- Definice s využitím částečné aplikace, bez formálních parametrů.

```
minus4 :: Num a => a -> a
minus4 = flip (-) 4
```

- Standardní definice téhož s využitím formálních parametrů.

```
minus4 :: Num a => a -> a
minus4 x = (-) x 4
```

Pozorování

- Funkce vyššího řádu a částečná aplikace souvisí s násobným použitím funkcionálního typového konstrukturu \rightarrow .
- Chceme-li zabránit částečné aplikaci, musíme definovat funkci tak, aby v jejím typu byl pouze jeden výskyt \rightarrow .
- Pokud chceme funkci předat více argumentů najednou, předáme je jako uspořádanou n-tici.

Příklad

- Všimněte si rozdílu v typech a definicích následujících funkcí.

```
krat :: Num a => a -> a -> a
```

```
krat x y = x * y
```

```
krat1 :: Num a => (a,a) -> a
```

```
krat1 (x,y) = x * y
```

Funkce curry a uncurry

- Předdefinované funkce pro změnu řádu binárních funkcí.

curry

- Modifikuje funkci tak, že tato funkce místo uspořádané dvojice hodnot přijímá dva samostatné parametry.

```
curry :: ((a,b) -> c) -> a -> b -> c
curry f x y = f (x,y)
```

uncurry

- Modifikuje funkci tak, že tato funkce místo dvou samostatných parametrů přijímá uspořádanou dvojici hodnot.

```
uncurry :: (a -> b -> c) -> (a,b) -> c
uncurry f (x,y) = f x y
```

Příklad

- Mějme definovány následující funkce

```
krat :: Num a => a -> a -> a
krat x y = x * y
```

```
krat1 :: Num a => (a,a) -> a
krat1 (x,y) = x * y
```

- Uvedte alternativní definici funkce `krat` pomocí funkce `krat1` a obráceně.

Příklad

- Mějme definovány následující funkce

```
krat :: Num a => a -> a -> a
krat x y = x * y
```

```
krat1 :: Num a => (a,a) -> a
krat1 (x,y) = x * y
```

- Uvedte alternativní definici funkce `krat` pomocí funkce `krat1` a obráceně.

Řešení

```
krat = curry krat1
krat1 = uncurry krat
```

Co je to

- Pro každý **binární operátor** je možné definovat funkci, jež odpovídá částečné aplikaci funkce na první formální parametr a funkci, jež odpovídá částečné aplikaci funkce na druhý formální parametr. Těmto funkcím se říká **operátorové sekce**.

Operátorové sekce

- Předpokládejme binární operátor \oplus a hodnoty p a q
 $\oplus :: a \rightarrow b \rightarrow c$
 $p :: a$
 $q :: b$
- Částečnou aplikaci na první argument zapíšeme jako $(p\oplus)$
 $(p\oplus) = (\oplus) p$
- Částečnou aplikaci na druhý argument zapíšeme jako $(\oplus q)$
 $(\oplus q) = \text{flip } (\oplus) q$

Příklad 1

- Jednoduché použití operátorových sekcí.

`(*2) 34` \rightsquigarrow 68

`(++".") ['V', 'ě', 't', 'a']` \rightsquigarrow "Věta."

Příklad 2

- Odvoďte typ následujících funkcí, popište jejich význam:

`(1.0/)`

`('mod' 3)`

`(!!0)`

`(>0)`

Příklad 1

- Jednoduché použití operátorových sekcí.

`(*2) 34 ~> 68`

`(++".") ['V', 'ě', 't', 'a'] ~> "Věta."`

Příklad 2

- Odvoďte typ následujících funkcí, popište jejich význam:

`(1.0/) :: Fractional a => a -> a`

`('mod' 3) :: Integral a => a -> a`

`(!!0) :: [a] -> a`

`(>0) :: (Num a, Ord a) => a -> Bool`

Skládání funkcí

- Základní operátor funkcionálního programování

$$(.) :: (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow c$$
$$(.) f g x = f (g x)$$

Pozorování

- Operátor pro skládání funkcí lze chápat také jako binární.

$$(.) :: (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$$

- Pro operátor $(.)$ je možné definovat operátorovou sekci.
- Použití operátorové sekce pro operátor $(.)$ na jiné než jednoduché funkce je však velmi matoucí a v praxi se nepoužívá.

$$(.(.)) :: (((a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow c) \rightarrow d) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow d$$

Skládání funkcí

- Základní operátor funkcionálního programování

$$(.) :: (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow c$$
$$(.) f g x = f (g x)$$

Pozorování

- Operátor pro skládání funkcí lze chápat také jako binární.

$$(.) :: (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$$

- Pro operátor $(.)$ je možné definovat operátorovou sekci.
- Použití operátorové sekce pro operátor $(.)$ na jiné než jednoduché funkce je však velmi matoucí a v praxi se nepoužívá.


$$(. (.)) :: (((a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow c) \rightarrow d) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow d$$

Pozorování

- Funkce `flip`, `curry`, `uncurry`, `(.)` a operátorové sekce používáme k vytvoření tzv. **bezparametrové** definice funkce.

Připomenutí bezparametrové definice

- Funkci `f` definovanou s použitím formálního parametru

```
f x = (not.odd) x
```

- Je možné definovat i bez použití formálního parametru

```
f = (not.odd)
```

Příklad

```
f x = (3*x)^7
```

```
f x = flip (^) 7 (3*x)
```

```
f x = flip (^) 7 ((* 3) x)
```

```
f x = (.) (flip (^) 7) ((* 3) x)
```

```
f x = (.) (flip (^) 7) (3*) x
```

```
f = (.) (flip (^) 7) (3*)
```

Nepojmenované funkce

Motivace

- Při standardní definici funkce musíme tuto funkci pojmenovat.
- Mnohé funkce, často jednoduché, použijeme jednorázově.
- Funkce s jednorázovým použitím je zbytečné pojmenovávat.

Příklad

- Globální definice a použití jednoduché funkce

```
f x = x*x + 1
```

```
map f [1,2,3,4,5] ~> [2,5,10,17,26]
```

- Lokální definice a použití jednoduché funkce

```
let f x = x*x + 1 in map f [1,2,3,4,5] ~> [2,5,10,17,26]
```

Co to je

- Definice funkce v místě jejího použití bez uvedení jejího jména.
- Příklad:

`map (\x -> x*x+1) [1,2,3,4,5] \rightsquigarrow [2,5,10,17,26]`

Původ a všeobecné označení

- Myšlenka a teoretický základ pochází z Lambda kalkulu, proto se též nepojmenovaným funkcím říká **lambda funkce**.
- Principu vytváření lambda funkcí, se říká lambda abstrakce.

Pozorování

- Koncept lambda funkcí se vyskytuje v mnoha imperativních programovacích jazycích, např. C++, C#, SCALA, PHP, ...

Lambda abstrakce

- Uvažme výraz M , který představuje tělo funkce.

$$M \equiv x * x + 1$$

- Z těla funkce vytvoříme funkci použitím lambda abstrakce.

$$\lambda x.M \equiv \lambda x.(x * x + 1)$$

- Při aplikaci lambda funkce $\lambda x.M$ na výraz N , se všechny volné výskyty formálního parametru x v M nahradí výrazem N . Výskyt proměnné x je označován jako volný, pokud není v rozsahu žádné lambda abstrakce.

$$\lambda x.M N \equiv \lambda x.(x * x + 1) N = N * N + 1$$

Příklady

- $(\lambda x.x * x + 1) 3 = 3 * 3 + 1 = 10.$
- $(\lambda x.x + (\lambda x.x + x) x) 5 = 5 + (\lambda x.x + x) 5 = 5 + (5 + 5) = 15.$
- $(\lambda x.34) 3 = 34$

Definice a použití nepojmenované funkce

- λ se špatně píše na klávesnici.
- V programovacím jazyce *Haskell* je lambda abstrakce zapsána pomocí zpětného lomítka a šipky:

```
\ formální parametry -> tělo funkce
```

Příklady

```
(\ x -> x*x + x*x) 3 ~> ... ~> 18
```

```
(\ x -> x False) not ~> not False ~> True
```

Nepojmenovanou funkci je možné pojmenovat

```
f = (\ x -> x*x + x*x)
```

```
f 3 ~> ... ~> 18
```

```
f 3 ~> (\ x -> x*x + x*x) 3 ~> ... ~> 18
```

Pozorování

- Vnořená lambda abstrakce vytváří funkce vyšších řádů.
- $(\lambda x.(\lambda y.(x - y))) 3 4 = (\lambda y.(3 - y)) 4 = 3 - 4 = -1$

Zápis v Haskellu

- Odvozený přímo z vícenásobné aplikace lambda abstrakce
 $\backslash x \rightarrow (\backslash y \rightarrow x - y)$
 $(\backslash x \rightarrow (\backslash y \rightarrow x - y)) 3 4 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow -1$
- Zkrácený z důvodu čitelnosti kódu a pohodlí programátorů
 $\backslash x y \rightarrow x - y$
 $(\backslash x y \rightarrow x - y) 3 4 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow -1$

Nepojmenované funkce a jejich typy

- Obecně platí stejná pravidla jako pro pojmenované funkce.
- Název funkce (ani jeho neexistence) nemá vliv na typ funkce.

Efekt lambda abstrakce na typ

- Každý formální parametr v lambda abstrakci přidá do typu výrazu jeden výskyt typového konstrukturu \rightarrow a novou typovou proměnnou, která se navíc specializuje podle kontextu použití konkrétního formálního parametru.

Pozorování

- Typ funkce si Hugs/GHCi umí odvodit z její definice.

Příklad 1

```
'a'                :: Char
(\ x -> 'a')       :: a -> Char
(\ x y -> 'a')     :: a -> b -> Char
(\ x -> (\ y -> 'a')) :: a -> b -> Char
```

Příklad 2

```
\ x y -> x !! y    :: [a] -> Int -> a
\ x y -> x || y    :: Bool -> Bool -> Bool
```

Příklad 3

```
(\ x y -> x . y)   :: (a -> b) -> (c -> a) -> c -> b
(\ x y -> x y)    :: (a -> b) -> a -> b
```

Pozorování

- Vnořené aplikace funkcí mohou být díky závorkování nečitelné.
- Něterým uzávorkováním se lze vyhnout použitím aplikačního operátoru \$, který má při vyhodnocování nejnižší prioritu.

Aplikační operátor \$

- $(\$)$:: $(a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow b$
 $(\$)$ $f\ x = f\ x$
- $f(g\ x) \equiv (\$)\ f\ (g\ x) \equiv f\ \$\ (g\ x) \equiv f\ \$\ g\ x$
- $f(g(h\ x)) \equiv f\ \$\ g\ \$\ h\ x$

Ekvivalentní zápisy pomocí operátoru \$

- `not (not (not (not (not True)))))`
`not $ not $ not $ not $ not True`
- `(+1) ((+2) ((+3) ((+4) 0)))`
`(+1) $ (+2) $ (+3) $ (+4) 0`
- `(even ((+1) 0)) || (odd ((+2) 0))`
`(even $ (+1) 0) || (odd $ (+2) 0)`

Příklady

- `(++) [1] $ map (+1) [1] ~>* [1,2]`
- `[1] ++ $ map (+1) [1] ~>* ERROR`
- Rozsah platnost \$ je podřízen syntaktickému pravidlu o zarovnání, tj. v do notaci "končí s koncem řádku".

Mentální cvičení

- Definujte operátorové sekce pomocí lambda abstrakce.
- Identifikujte funkce vyššího řádu ve svém každodenním životě.