Druhá vnitrosemestrální práce, MB103, 15. 11. 2016

Skupina A

Příklad 1. *(3b) Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = 2x + y$ na části hyperboly $y = 1/x$ ležící v prvním kvadrantu.*

Řešení. Hyperbola není omezená, tudíž ani kompaktní. Pokud si nakreslíme vrstevnice funkce (přímky $2x + y = const$) je zřejmé, že funkce má na zkoumané části mininum, maximum nemá.

Bez těchto úvah prostě převedeme funkci $f(x, y)$ na funkci jedné proměnné (dosadíme $y = 1/x$): $f(x, 1/x) = 2x + \frac{1}{x}$. Nalezneme jediný kritický bod ležící na zkoumané části: $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$. Pokud nám není ze situace jasné, že se jedná o minimum, spočítáme druhou derivaci funkce $f'' = \frac{2}{x^3}$, která je kladná, jedná se tedy skutečně o minimum.

Lze postupovat i způsobem, že vyřešíme soustavu $\operatorname{grad} f = k \cdot \operatorname{grad} g$, kde $g(x, y) = y - 1/x$, tedy soustavu $2 = \frac{k}{x^2}, 1 = k$.

Závěr: daná funkce nabývá na zkoumané části hyperboly minima v bodě $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$, maxima nenabývá. □

Příklad 2. *(4b) Určete těžiště části roviny ležící uvnitř kružnice $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, nad osou x a přímkou $y = -x + 1$.*

Řešení. Nejprve posuneme do počátku, pak provedeme transformaci do polárních souřadnic. Obsah je bez počítání 3/8 obsahu kruhu o poloměru 1, tedy $\frac{3\pi}{8}$.

$x_T = \int_0^1 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r + 1 = \frac{4\sqrt{2}}{9\pi} + 1,$

$y_T = \int_0^1 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{8}{9\pi}(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1).$ □

Příklad 3. *(3b) Poločas rozpadu radioaktivního prvku A je šest let, prvku B jeden rok. Máme-li 6 kg prvku B a 1 kg prvku A, za jak dlouho budeme mít stejné množství obou? Rychlost rozpadu prvku je přímo úměrná jeho hmotnosti. (ve výsledku můžete používat funkce* ln*)*

Řešení. $\frac{6}{5} \frac{\ln 6}{\ln 2}$. □