

**MB103, podzimní semestr 2016,
příklady k domácímu rozjímání, týden 19. 9. – 25. 9.**

Příklad 1. Nalezněte polynom dvou proměnných, jehož oborem hodnot je otevřený interval $(0, \infty)$.

Řešení. Např. $x^2y^2 + x^2 + xy + 1/4$. □

Příklad 2. Najděte (spojitou) bijekci mezi otevřeným intervalem $(0, 1)$ a množinou všech reálných čísel. (Pro definici spojitosti můžete použít definice spojité funkce z prvního semestru; podmínkou spojitosti se však nezátěžujte, stačí najít nějakou bijekci; ona bude téměř určitě spojitá.) Co bijekce mezi uzavřeným intervalem $[0, 1]$ a \mathbb{R} ? Bude spojitá?

Řešení. Například stereografická projekce: „namotáme“ interval $(0, 1)$ na kružnici o obvodu 1 tak, aby pouze „severní pól S “ zůstal neobsazen a „posadíme ji“ na počátek souřadnic. Bodu X v intervalu (tj. kružnice mimo bodu S) pak odpovídá jediný průsečík přímky SX s osou x .

Spojité bijekce uzavřeného intervalu na \mathbb{R} neexistuje (vzor otevřené množiny \mathbb{R} ve spojitém zobrazení musí být otevřená množina, což uzavřený interval není).

Bijekce však existuje, stačí vzít například libovolnou bijekci otevřeného intervalu $(0, 1)$ na \mathbb{R} , třeba výše popsanou stereografickou, a „posunout“ přiřazení přirozených čísel: jedničku (severní pól) zobrazíme na nulu, číslo, které se zobrazovalo na nulu, tedy jednu polovinu, pak na jedničku, číslo, které se zobrazovalo na jedničku pošleme na dvojku, číslo, které se zobrazovalo na dvojku pošleme na trojku, atd. □