Písemná práce MB103 a MB203, FI MUNI, 23.1.2017

Příklad 1. *(3b.) Určete lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2y^2 - xy^2 - y$ *na* $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Stac. bod $[\frac{1}{2}, -2]$ (1b.), Hessián $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy-2y \\ 4xy-2y & 2x^2-2x \end{pmatrix}$ (1b.), $H(\frac{1}{2}, -2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\det H(\frac{1}{2}, -2) < 0$, není minimum (1b.). □

Příklad 2. *(5b.) Nalezněte globální extrémy funkce* $f(x) = 2x^2 + y$ *na trojúhelníku s vrcholy* , $[1,0]$, $[2,1]$, $[0,1]$.

Řešení. Extrémy na $\mathbb{R}^2$ funkce nemá (stačí uvážit y) (1b.) Globální maximum na trojúhelníku zřejmě v bodě $[2,1]$ (je tam největší x i y, funkce je v obou proměnných rostoucí (x je v trojúhelníku pouze kladné), (1.5b.), minimum nastává v některém z vrcholů, nebo na některé straně. Zkoumejme nejprve stranu $y = -x+1$, $0 \leq x \leq 1$. Na této úsečce hledáme extrém fce $f(x) = 2x^2 - x + 1$, to je v bodě $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ a je to minimum (je to parabola, nebo podle znaménka druhé derivace), $f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{7}{8}$. Na zbylých dvou strannách je hodnota funkce alespoň 1 – buď x nebo y je aspoň 1, tedy i $2x^2 + y \geq 1$. Globální minimum funkce na trojúhelníkku nastává tedy v bodě $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ a hodnota funkce v něm je $\frac{7}{8}$. (2.5b) □

Příklad 3. *(2b.) Dokažte, že neexistuje (konečná) limita* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{xy}$

Řešení. Volbou $x = y$ dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x^2} == \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x^2} = 4 \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t^2} =$$
$$= 4 \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} = 4 \cdot 1 \cdot \infty$$

Ani původní limita tedy nemůže být konečná.

Nebo si stačí všimnout, že funkce není definovaná na přímkách $x = 0$ a $y = 0$, tedy v libovolném okolí bodu $[0,0]$ je v nějakém nedefinována, limita tedy neexistuje.

□

Příklad 4. *(6b.) Určete distribuční funkci náhodné veličiny* X*, udávající délku hrany pravidelného čtyřstěnu, je-li jeho povrch rozložen rovnoměrně na intervalu* $[1,3]$.

Řešení. Označíme-li Y náhodnou veličinu udávající povrch čtyřstěnu, pak $Y = \sqrt{3}X^2$ (0.5b), tedy $\mathcal{H}\ (X) = \{[\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \sqrt[4]{3}]\}$ (1.5b). Pak pro t z uvedeného intervalu platí $F_X(t) = P[X < t] = P[\sqrt{3}X^2 < \sqrt{3}t^2] = P[Y < \sqrt{3}t^2] = \frac{\sqrt{3}t^2 - 1}{2}$ (3b.) Celkem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leq \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \\ \frac{\sqrt{3}t^2-1}{2} & \text{pro } t \in [\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \sqrt[4]{3}] \\ 1 & \text{pro } t > \sqrt[4]{3} \end{cases}$$

□

Příklad 5. *(4b.) Z náhodné veličiny* X *byl pořízen výběr s těmito hodnotami:*45, 40, 41, 43, 41. *Určete* 95% *interval spolehlivosti pro střední hodnotu náhodné veličiny* X*. Pro připomenutí je interval spolelivosti tvaru* $(\overline{X} - \frac{S\cdot t_\alpha}{\sqrt{n}}; \overline{X} + \frac{S\cdot t_\alpha}{\sqrt{n}})$,

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	1.832	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.256	0.685	1.318	1.711	1.828	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	1.825	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	1.822	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	1.819	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.689
28	0.256	0.683	1.313	1.701	1.817	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	1.814	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.660
30	0.256	0.683	1.310	1.697	1.812	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
31	0.256	0.682	1.309	1.696	1.810	2.040	2.144	2.453	2.744	3.022	3.375	3.633
32	0.255	0.682	1.309	1.694	1.808	2.037	2.141	2.449	2.738	3.015	3.365	3.622
33	0.255	0.682	1.308	1.692	1.806	2.035	2.138	2.445	2.733	3.008	3.356	3.611
34	0.255	0.682	1.307	1.691	1.805	2.032	2.136	2.441	2.728	3.002	3.348	3.601
35	0.255	0.682	1.306	1.690	1.803	2.030	2.133	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591
36	0.255	0.681	1.306	1.688	1.802	2.028	2.131	2.434	2.719	2.990	3.333	3.582
37	0.255	0.681	1.305	1.687	1.800	2.026	2.129	2.431	2.715	2.985	3.326	3.574
38	0.255	0.681	1.304	1.686	1.799	2.024	2.127	2.429	2.712	2.980	3.319	3.566
39	0.255	0.681	1.304	1.685	1.798	2.023	2.125	2.426	2.708	2.976	3.313	3.558
40	0.255	0.681	1.303	1.684	1.796	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	1.781	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.254	0.678	1.292	1.664	1.773	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.254	0.677	1.290	1.660	1.769	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.766	1.980	2.076	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
140	0.254	0.676	1.288	1.656	1.763	1.977	2.073	2.353	2.611	2.852	3.149	3.361
160	0.254	0.676	1.287	1.654	1.762	1.975	2.071	2.350	2.607	2.847	3.142	3.352
180	0.254	0.676	1.286	1.653	1.761	1.973	2.069	2.347	2.603	2.842	3.136	3.345
200	0.254	0.676	1.286	1.653	1.760	1.972	2.067	2.345	2.601	2.838	3.131	3.340
250	0.254	0.675	1.285	1.651	1.758	1.969	2.065	2.341	2.596	2.832	3.123	3.330
inf	0.253	0.674	1.282	1.645	1.751	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.090	3.290

kde t_α je vhodný kvantil Studentova rozložení. Stačí vyjádření s odmocinou.

Řešení. Spočítáme $\overline{X} = 42$ (.5b), výběrový rozptyl $S^2 = 4$, výběrová směrodatná odchylka $S = 2$ (1b). Interval spolehlivosti (2,5b.) $(42 - 2\frac{2{,}776}{\sqrt{5}}, 42 + 2\frac{2{,}776}{\sqrt{5}}) \doteq (39{,}52; 44{,}48)$. $\square$