Algebra I — podzim 2016 — 1. termín — 12.1.2017

Jméno: ....
UČO: ....

Hodnocení					

Na řešení je 150 minut.
Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem.

1. (15 bodů) Buď m, n nesoudělná přirozená čísla. Dokažte, že součin cyklické grupy o m prvcích a cyklické grupy o n prvcích je cyklická grupa.

2. (15 bodů) Dejte příklad:
   (a) nekonečné grupy a její netriviální konečné podgrupy;
   (b) dvou různých těles T, S a homomorfismus okruhů $f : T \to S$;
   (c) homomorfismus monoidu M, který není grupou, na monoid N, který grupou je.

3. (15 bodů) Buď A konečná množina $A = \{1, 2, \ldots, m\}$, kde $m \geq 1$ je libovolné přirozené číslo. Víme, že $(\mathcal{P}(A), \div)$ je grupa.
   (*Zde $\mathcal{P}(A)$ je systém všech podmnožin množiny A a $\div$ je operace symetrického rozdílu.*)
   (a) Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{Z}_2$ dané předpisem $f(X) = [|X|]_2$, je homomorfismus z grupy $(\mathcal{P}(A), \div)$ do grupy $(\mathbb{Z}_2, +)$. (*Zde $|X|$ značí počet prvků množiny X.*)
   (b) Pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ uvažujeme $H_n = \{X \subseteq A \mid n \text{ dělí počet prvků } X\}$. Rozhodněte, pro která n je H_n podgrupa grupy $(\mathcal{P}(A), \div)$.

4. (20 bodů) Uvažme grupu $(G, \cdot)$, kde $G = \{2^p 3^q 5^r \in \mathbb{R} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\}$ a $\cdot$ je operace násobení reálných čísel. Dále buď H podgrupa této grupy generovaná prvky $\frac{4}{25}$ a $\frac{3}{5}$.
   (a) Popište podgrupu H.
   (b) Ukažte, že H je normální podgrupa grupy $(G, \cdot)$.
   (c) Určete, které známé grupě $(K, \cdot)$ je izomorfní faktorgrupa $(G, \cdot)/H$.
   (d) Předchozí tvrzení dokažte tak, že definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, a dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

5. (15 bodů) Napište rozklad polynomu $2x^7 + 3x^6 - 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$ na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

6. (20 bodů) Určete minimální polynom prvku $\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ nad $\mathbb{Q}$. Nezapomeňte na zdůvodnění.