Algebra I — podzim 2016 — 2. termín — 31.1.2017

Jméno: ....
UČO: ....

Hodnocení					

Na řešení je 150 minut.
Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem.

1. (15 bodů)
   (a) Definujte pojem *charakteristika* okruhu.
   (b) Definujte pojem *obor integrity*.
   (c) Zformulujte a dokažte větu o charakteristice oboru integrity.

2. (15 bodů) Dejte příklad:
   (a) komutativní grupy řádu 16, která neobsahuje prvek řádu 4;
   (b) polynomu nad $\mathbb{Q}$ stupně 5, který nemá kořen v $\mathbb{Q}$, a který není ireducibilní;
   (c) homomorfismu okruhu polynomů $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ takového, že $\varphi(x^2) = 3$.

   Pokud bude vaše odpověď, že takový příklad neexistuje, nezapomeňte odpověď řádně zdůvodnit!

3. (15 bodů) Na množině $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem
$$(a, [b]_2) \circ (c, [d]_2) = (a + (-1)^b c, [b + d]_2), \text{ pro } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$
   Dále uvažujme zobrazení $f : M \to \mathbb{Z}$ a $g : M \to \mathbb{Z}_2$ daná předpisy $f((a, [b]_2)) = a$, $g((a, [b]_2)) = [b]_2$.
   (a) Dokažte, že $(M, \circ)$ grupa.
   (b) Rozhodněte, zda je f homorfismus z grupy $(M, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}, +)$.
   (c) Rozhodněte, zda je g homorfismus z grupy $(M, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_2, +)$.
   (d) Určete jádro homomorfismu f a g, pokud dané zobrazení je homomorfismus.

4. (20 bodů) Uvažme grupu $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^3, +)$, kde sčítáme po složkách, tj. $\mathcal{G}$ je součin grup $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$. Dále buď $H = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ podmnožina grupy $\mathcal{G}$.
   (a) Dokažte, že H je normální podgrupa grupy $\mathcal{G}$.
   (b) Určete, které známé grupě $(K, \cdot)$ je izomorfní faktorgrupa $\mathcal{G}/H$.
   (c) Předchozí tvrzení dokažte tak, že definujte vhodné zobrazení $\alpha : \mathbb{R}^3 \to K$, a dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

5. (15 bodů) Nalezněte reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že polynom s reálnými koeficienty $2x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 11x^2 + ax + b$ má komplexní kořen $1 + i$. Výsledný polynom rozložte na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

6. (20 bodů) Buď $f = x^3 + 3x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Dokažte, že f je ireducibilní polynom nad $\mathbb{Q}$.
   Označme $\alpha \in \mathbb{C}$ jeden z kořenů polynomu f.
   (b) Určete $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ taková, že $a_0 + a_1 \cdot \alpha + a_2 \cdot \alpha^2 = \alpha^5$.
   (c) Určete $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ taková, že $b_0 + b_1 \cdot \alpha + b_2 \cdot \alpha^2 = (\alpha^2 + \alpha + 1)^{-1}$.