Algebra I — podzim 2016 — 3. termín — 7.2.2017

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení					

Na řešení je 150 minut.

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem.

1. (15 bodů)
   (a) Definujte pojem *podgrupa.*
   (b) Definujte pojem *normální podgrupa.*
   (c) Definujte pojem *jádro homomorfismu.*
   (d) Dokažte, že jádro homomorfismu $f : (G, \cdot) \to (H, \cdot)$ je normální podgrupa grupy $(G, \cdot)$.

2. (15 bodů) Dejte příklad:
   (a) grupy řádu 20 a její podgrupy řádu 8;
   (b) tělesa, které obsahuje jako podokruh okruh polynomů nad $\mathbb{Z}$;
   (c) injektivního homomorfismu z grupy řádu 100 do nekonečné grupy.

   Pokud bude vaše odpověď, že takový příklad neexistuje, nezapomeňte odpověď řádně zdůvodnit!

3. (15 bodů) Uvažujme množinu čísel

$$R = \left\{ \frac{m}{3^k} \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

   na níž uvažujeme obvyklé operace sčítání a násobení čísel.
   (a) Rozhodněte, zda je $(R, +)$ monoid;
   (b) Rozhodněte, zda je $(R, +)$ grupa;
   (c) Rozhodněte, zda je $(R, \cdot)$ monoid;
   (d) Rozhodněte, zda je $(R, \cdot)$ grupa;
   (e) Rozhodněte, zda je $(R, +, \cdot)$ okruh;
   (f) Rozhodněte, zda je $(R, +, \cdot)$ těleso;
   (g) Rozhodněte, zda předpis $f : R \to \mathbb{Z}, f(\frac{m}{3^k}) = m$ (pro $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$) zadává homomorfismus (monoidů, resp. grup, resp. okruhů) v jednotlivých případech (a)-(e), kde byla pozitivní odpověď. (Přitom v $\mathbb{Z}$ pak bereme stejné operace jako v R.)

4. (20 bodů) Uvažme grupu $(G, \cdot)$, kde $G = \{2^p 3^q 5^r \in \mathbb{R} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\}$ a $\cdot$ je operace násobení reálných čísel. Dále buď H podgrupa této grupy generovaná prvky 6 a 10.
   (a) Popište podgrupu H.
   (b) Ukažte, že H je normální podgrupa grupy $(G, \cdot)$.
   (c) Určete, které známé grupě $(K, \cdot)$ je izomorfní faktorgrupa $(G, \cdot)/H$.
   (d) Předchozí tvrzení dokažte tak, že definujte vhodné zobrazení $\alpha : G \to K$, a dokažte, že α je surjektivní homomorfismus grup, jehož jádrem je H.

5. (15 bodů) O polynomech $f = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 3$ a $g = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3$ víme, že mají společný kořen. Nalezněte všechny kořeny polynomů f a g. Oba polynomy rozložte na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

6. (20 bodů) Buď $\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}$.
   (a) Určete minimální polynom prvku α nad $\mathbb{Q}$. (Nezapomeňte odpověď zdůvodnit.)
   (b) Vyjádřete číslo $\frac{1}{\alpha+1}$ jako součet racionálních násobků mocnin čísla α. (Mocniny čísla α neroznásobujte a pište je ve tvaru α^k.)