

Limity konečných automatů

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb \dots\}$$

a a a a a b b b b b

Předpokládejme, že existuje automat \mathcal{M} přijímající jazyk L .
Nechť \mathcal{M} má k stavů.

Uvažme výpočet \mathcal{M} na slově $a^n b^n$ kde $n > k$.

aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb

Protože $n > k$, musí existovat (z Dirichletova principu) stav p takový, že při čtení iniciální posloupnosti symbolů a projde automat stavem p (alespoň) dvakrát.

aaaaaaaa aaaabbbbbbbbbbbbbbbbbbb

Platí $\hat{\delta}(q_0, x) = p \quad \hat{\delta}(p, y) = p \quad \hat{\delta}(p, z) = r \in F$

Pak ale $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) = \hat{\delta}(p, z) = r \in F$

aaaaaaaa aaaabbbbbbbbbbbbbbbbbbb

Analogicky můžeme „vsunout“ slovo y :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0, xyxyz) &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), y), y), y), z) \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(p, y), y), y), z) \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(p, y), y), z) \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(p, y), z) \\ &= \hat{\delta}(p, z) \\ &= r \in F\end{aligned}$$

Lemma. [o vkládání, pumping lemma]

Nechť L je regulární jazyk.

Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že libovolné slovo $w \in L$ délky alespoň n lze psát ve tvaru $w = xyz$, kde $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ a $xy^i z \in L$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz. Nechť DFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozpoznává jazyk L .

Položme $n = \text{card}(Q)$.

Pro libovolné slovo $w \in L$ délky alespoň n platí, že automat \mathcal{M} projde při akceptování slova w (alespoň) dvakrát stejným stavem.

Slovo w tedy můžeme rozdělit na tři části: $w = xyz$, kde $y \neq \varepsilon$ a $\hat{\delta}(q_0, x) = p$, $\hat{\delta}(p, y) = p$ a $\hat{\delta}(p, z) = r \in F$. Je zřejmé, že ke zopakování nějakého stavu dojde nejpozději po zpracování prvních n znaků a tedy dostáváme $|xy| \leq n$.

Dále $\hat{\delta}(p, y^i) = p$ pro libovolné $i \in \mathbb{N}_0$, proto také $\hat{\delta}(q_0, xy^i z) = r$, tj. $xy^i z \in L(\mathcal{M})$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$. □

L je regulární $\implies \exists n \in \mathbb{N}$.

$\forall w \in L . (|w| \geq n \implies$

$\exists x, y, z . (w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq n \wedge$

$\forall i \geq 0 . xy^i z \in L))$

Pomocí Lemmatu lze dokázat, že nějaký jazyk není regulární.

Nechť pro jazyk L platí:

- pro libovolné $n \in \mathbb{N}$
- existuje takové slovo $w \in L$ délky alespoň n , pro které platí, že
- při libovolném rozdělení slova w na takové tři části x, y, z ,
že $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$,
- existuje alespoň jedno $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že $xy^i z \notin L$.

Pak z Lemma o vkládání plyne, že L není regulární.

Příklad důkazu ne-regularity pomocí Lemmatu o vkládání

$$L = \{uc^m u^R \mid u \in \{a, b\}^*, m > 0\}$$

Myhillova-Nerodova věta

Motivace I

Každý DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s totální přechodovou funkcí definuje ekvivalenci \sim na Σ^* :

$$u \sim v \stackrel{\text{def}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 3\}$$

Pravá kongruence

Definice 2.20. Necht' Σ je abeceda a \sim je ekvivalence na Σ^* . Ekvivalence \sim je **pravá kongruence (zprava invariantní)**, pokud pro každé $u, v, w \in \Sigma^*$ platí:

$$u \sim v \implies uw \sim vw$$

Tvrzení 2.21. Ekvivalence \sim na Σ^* je pravá kongruence právě když pro každé $u, v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ platí $u \sim v \implies ua \sim va$.
(Implikace \implies je triviální, implikace \impliedby se snadno ukáže indukcí k délce zprava přiretěženého slova w .)

Index ekvivalence \sim je počet tříd rozkladu Σ^*/\sim .
Je-li těchto tříd nekonečně mnoho, klademe index \sim roven ∞ .

Příklad

Jsou tyto relace na slovech nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ pravé kongruence?

1 $u \sim v \iff u$ a v začínají stejným symbolem nebo $u = v = \varepsilon$
index \sim je ...

2 $u \sim v \iff \#_a(u) = \#_a(v)$
index \sim je ...

3 $u \sim v \iff u$ a v mají stejné předposlední písmeno nebo $|u|, |v| \leq 1$
index \sim je ...

Myhillova-Nerodova věta

Motivace II

Pravá kongruence \sim na Σ^* s konečným indexem jednoznačně (až na pojmenování stavů) určuje DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, \emptyset)$ s totální přechodovou funkcí a bez nedosažitelných stavů splňující:

$$u \sim v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

$$u \sim v \iff u \text{ a } v \text{ začínají stejným symbolem nebo } u = v = \varepsilon$$

Prefixová ekvivalence

Definice 2.25. Necht' L je libovolný (ne nutně regulární) jazyk nad abecedou Σ . Na množině Σ^* definujeme relaci \sim_L zvanou **prefixová ekvivalence pro L** takto:

$$u \sim_L v \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$$

Věta. \sim_L je pravá kongruence.

Příklad

1 $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 3\}$
index \sim_L je ...

2 $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
index \sim_L je ...

Myhillova-Nerodova věta

Věta 2.28. Necht' L je jazyk nad Σ . Pak tato tvrzení jsou ekvivalentní:

- 1 L je rozpoznatelný deterministickým konečným automatem.
- 2 L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného pravou kongruencí na Σ^* s konečným indexem.
- 3 Relace \sim_L má konečný index.

Důkaz.

$$1 \implies 2$$

$$2 \implies 3$$

$$3 \implies 1$$



1 \implies 2

Jestliže L je rozpoznatelný deterministickým konečným automatem
pak L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného pravou kongruencí na Σ^* s konečným indexem.

- pro daný L rozpoznávaný automatem \mathcal{M} zkonstruujeme relaci požadovaných vlastností
- $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, δ je totální
- na Σ^* definujeme binární relaci \sim předpisem

$$u \sim v \stackrel{\text{def}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

- ukážeme, že \sim má požadované vlastnosti

$$u \sim v \stackrel{\text{def}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

- \sim je ekvivalence (je reflexivní, symetrická, tranzitivní)
- \sim má konečný index
třídy rozkladu odpovídají stavům automatu
- \sim je pravá kongruence:
Nechť $u \sim v$ a $a \in \Sigma$. Pak
 $\hat{\delta}(q_0, ua) = \delta(\hat{\delta}(q_0, u), a) = \delta(\hat{\delta}(q_0, v), a) = \hat{\delta}(q_0, va)$ a tedy $ua \sim va$.
- L je sjednocením těch tříd rozkladu určeného relací \sim , které odpovídají koncovým stavům automatu \mathcal{M} □

2 \implies 3

Necht' L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného pravou kongruencí R na Σ^* s konečným indexem.

Pak prefixová ekvivalence \sim_L má konečný index.

■ $uRv \implies u \sim_L v$ pro všechna $u, v \in \Sigma^*$ (tj. $R \subseteq \sim_L$)

■ každá třída ekvivalence relace R je **celá** obsažena v nějaké třídě ekvivalence \sim_L

■ index ekvivalence \sim_L je menší nebo roven indexu ekvivalence R

■ R má konečný index $\implies \sim_L$ má konečný index



3 \implies 1

Necht' prefixová ekvivalence \sim_L má konečný index.

Pak jazyk L je rozpoznatelný deterministickým konečným automatem.

Zkonstruujeme automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ přijímající L :

- $Q = \Sigma^*/\sim_L$
Stavy jsou třídy rozkladu Σ^ určeného ekvivalencí \sim_L . (Konečnost!)*
- $q_0 = [\varepsilon]$
- δ je definována pomocí reprezentantů: $\delta([u], a) = [ua]$
Definice δ je korektní, protože nezávisí na volbě reprezentanta.
- $F = \{[v] \mid v \in L\}$

Důkaz korektnosti, tj. $L = L(\mathcal{M})$

■ $\hat{\delta}([\varepsilon], v) = [v]$ pro každé $v \in \Sigma^*$ (indukcí k délce slova v)

■ $v \in L(\mathcal{M}) \iff \hat{\delta}([\varepsilon], v) \in F \iff [v] \in F \iff v \in L$



Použití Myhillovy-Nerodovy věty k důkazu neregularity

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Nechť $i \neq j$. Pak $a^i \not\sim_L a^j$, protože $a^i b^i \in L$ ale $a^j b^i \notin L$.

Žádné dvě ze slov $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \dots$ nepadnou do stejné třídy ekvivalence relace \sim_L .

\sim_L **nemá** konečný index $\implies L$ **není regulární** ($\neg 3 \implies \neg 1$)

Použití Myhillovy-Nerodovy věty k důkazu regularity

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 3\}$$

Třídy ekvivalence relace \sim_L :

$$\begin{aligned} T_1 &= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 0\} \\ T_2 &= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 1\} \\ T_3 &= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2\} \\ T_4 &= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 3\} \end{aligned}$$

\sim_L **má** konečný index \implies L **je** rozpoznatelný deterministickým
konečným automatem, tj. **regulární** (3 \implies 1)

Další použití Myhillovy-Nerodovy věty

Věta 2.29. a 2.31. Minimální deterministický konečný automat s totální přechodovou funkcí akceptující jazyk L je určen jednoznačně až na isomorfismus (tj. přejmenování stavů). Počet stavů tohoto automatu je roven indexu prefixové ekvivalence \sim_L .