Vyhledávání, řazení, složitost

IB111 Základy programování
Radek Pelánek

2017

. . . ale nejdřív

Praktické rady:

- čtení chybových hlášek
- časté chyby

Čtení chybových hlášek

```
Traceback (most recent call last):
  File "sorting.py", line 63, in <module>
    test_sorts()
  File "sorting.py", line 59, in test_sorts
    sort(a)
  File "sorting.py", line 52, in insert_sort
    a[j] = curent
NameError: name 'curent' is not defined
```

- kde je problém? (identifikace funkce, číslo řádku)
- co je za problém (typ chyby)

Základní typy chyb

- SyntaxError
  - invalid syntax: zapomenutá dvojtečka či závorka, záměna = a ==, ...
  - EOL while scanning string literal: zapomenutá uvozovka
- NameError – špatné jméno proměnné (překlep v názvu, chybějící inicializace)
- IndentationError – špatné odsazení
- TypeError – nepovolená operace (sčítání čísla a řetězce, přiřazení do řetězce, ...)
- IndexError – chyba při indexování řetězce, seznamu a podobně („out of range“)

Časté chyby

projeví se „rychle“ (program spadne hned):

- zapomenutá dvojtečka, závorka, uvozovka
- překlepy
- použití $=$ tam, kde mělo být $==$
- špatný počet argumentů při volání funkce
- zapomenuté `len` v “`for i in range(alist)`”

Časté chyby

nemusí se projevit rychle / vždy:

- použití == tam, kde mělo být =
- `"True"` místo `True`
- záměna `print` a `return`
- chybné indexování (řetězce, seznamy)
- dělení nulou

Otrávené studny

- 8 studen, jedna z nich je otrávená
- laboratorní rozbor
  - dokáže rozpoznat přítomnost jedu ve vodě
  - je drahý
- kolik rozborů potřebujeme?
- jak určit otrávenou studnu?

Otrávené studny II

- 8 studen, jedna z nich je otrávená
- laboratorní rozbor
  - dokáže rozpoznat přítomnost jedu ve vodě
  - je drahý
  - je časově náročný (1 den)
- jak určit otrávenou studnu za 1 den pomocí 3 paralelních rozborů?

Otrávené studny: řešení

Řešení s využitím binárních čísel

studna	kód	studna	kód
A	000	E	100
B	001	F	101
C	010	G	110
D	011	H	111

test	přidělené studny
1	B, D, F, H
2	C, D, G, H
3	E, F, G, H

Vyhledávání: hra

- Myslím si přirozené číslo X mezi 1 a 1000.
- Povolená otázka: „Je X menší než N?“
- Kolik otázek potřebujete na odhalení čísla?

Vyhledávání: hra

- Myslím si přirozené číslo X mezi 1 a 1000.
- Povolená otázka: „Je X menší než N?“
- Kolik otázek potřebujete na odhalení čísla?
- Mezi kolika čísly jste schopni odhalit skryté číslo na K otázek?

Vyhledávání: řešení

- půlení intervalu
- K otázek: rozlišíme mezi 2^K čísly
- N čísel: potřebujeme $\log_2 N$ otázek

Připomenutí: logaritmus

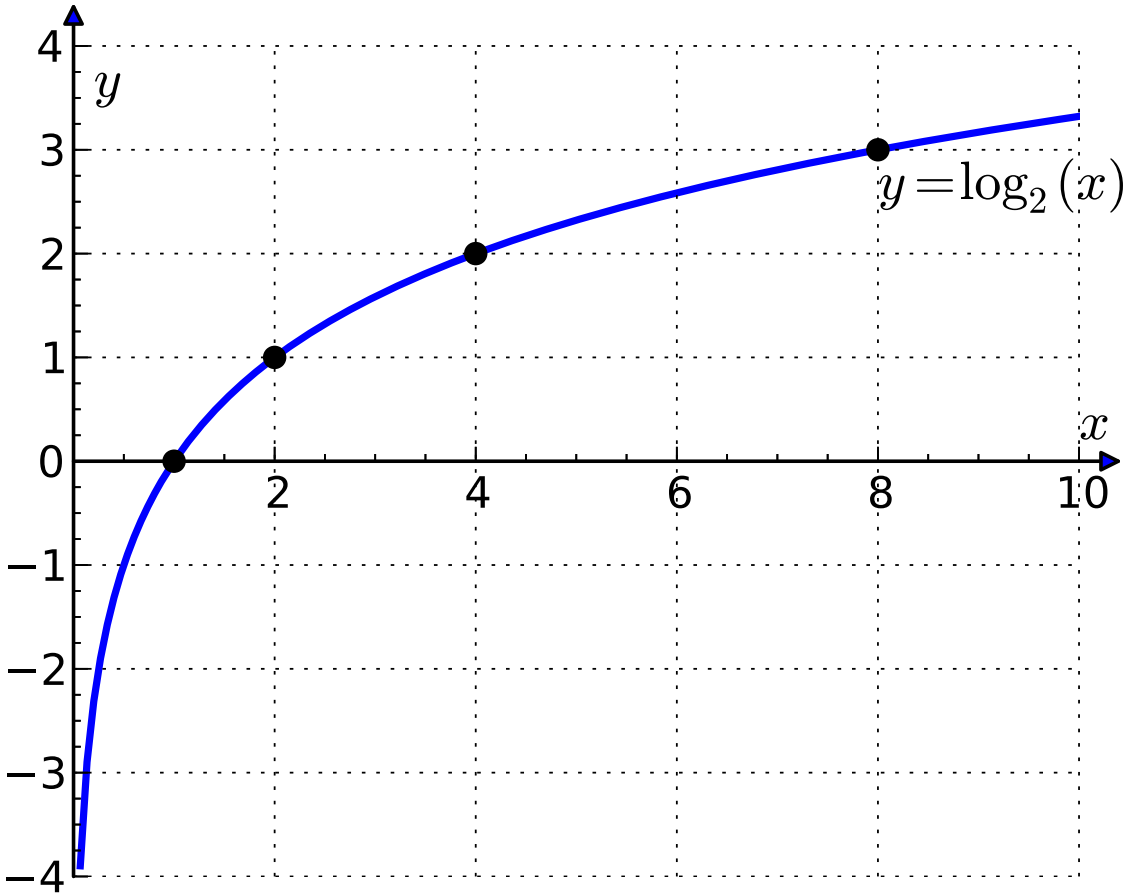
$$y = \log_b(x) \Leftrightarrow x = b^y$$

$$\begin{aligned}
\log_{10}(1000) &= 3 \\
\log_2(16) &= 4 \\
\log_2(1024) &= 10 \\
\log_b(xy) &= \log_b(x) + \log_b(y)
\end{aligned}$$

http://www.khanacademy.org/math/algebra/logarithms

https://www.umimematiku.cz/pocitani-logaritmy-3-uroven

Logaritmus – graf



Logaritmus – test

$$\begin{aligned}
\log_3(81) &= ? \\
\log_2(2) &= ? \\
\log_5(1) &= ? \\
\log_{10}(0.1) &= ? \\
\log_2(\sqrt{2}) &= ? \\
\log_{0.5}(4) &= ?
\end{aligned}$$

Vyhledávání: motivace

vyhledávání v (připravených) datech je velmi častý problém:

- web
- slovník
- informační systémy
- dílčí krok v algoritmech

Vyhledávání: konkrétní problém

- vstup: seřazená posloupnost čísel + dotaz (číslo)
- výstup: pravdivostní hodnota (True/False)
  příp. index hledaného čísla v posloupnosti (-1 pokud tam není)

příklad:

- vstup: 2, 3, 7, 8, 9, 14 + dotaz 8
- výstup: True, resp. 3 (číslování od nuly)

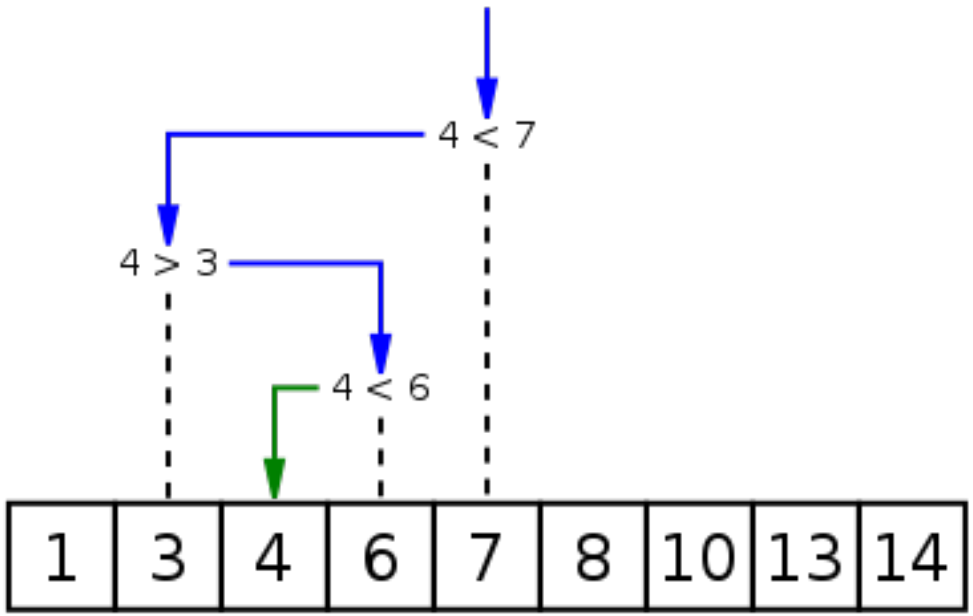
Vyhledávání a logaritmus

- naivní metoda = průchod seznamu
  - lineární vyhledávání, $O(n)$
  - pomalé (viz např. databáze s milióny záznamů)
  - jen velmi krátké seznamy
- základní rozumná metoda = půlení intervalu
  - logaritmický počet kroků (vzhledem k délce seznamu), $O(\log(n))$

Vyhledávání: půlení intervalu

- binární vyhledávání
- podobné jako: hra s hádáním čísel, aproximace odmocniny
- podíváme se na prostřední člen $\Rightarrow$ podle jeho hodnoty pokračujeme v levém/pravém intervalu
- udržujeme si „horní mez“ a „spodní mez“

Binární vyhledávání – ilustrace



Wikipedia

Vyhledávání: program

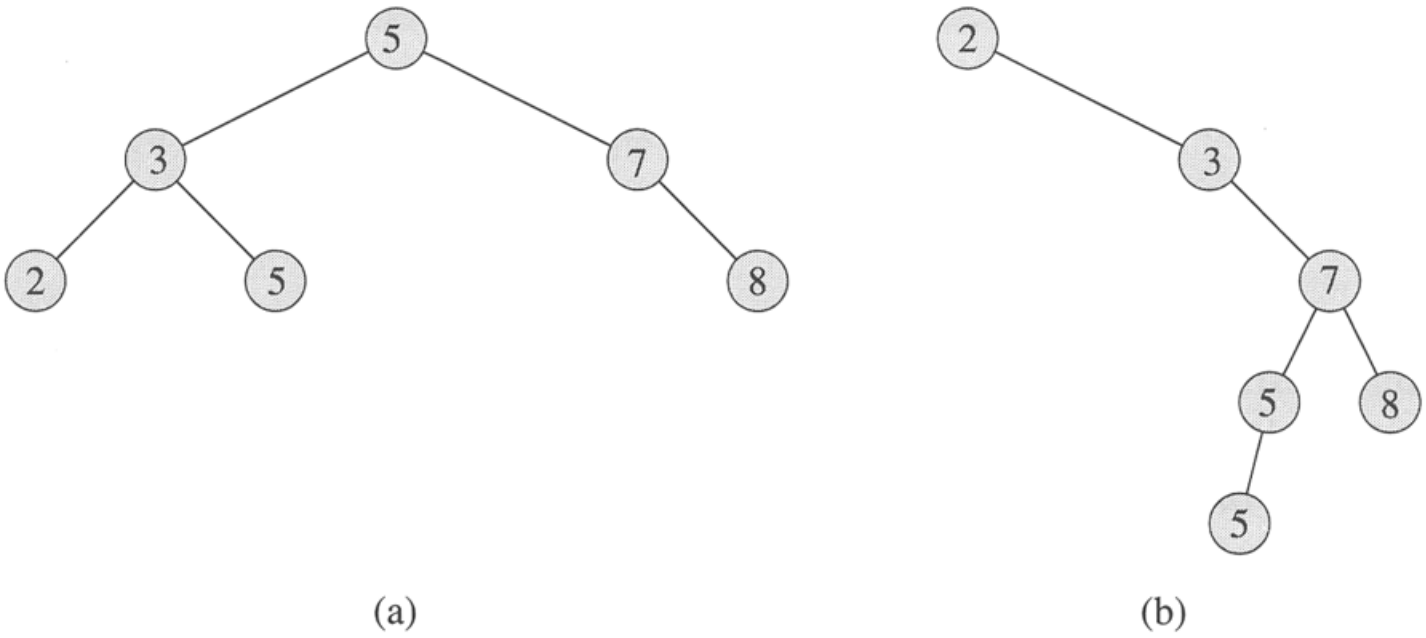
```
def binary_search(value, alist):
    lower_bound = 0
    upper_bound = len(alist) - 1
    while lower_bound <= upper_bound:
        middle = (lower_bound + upper_bound) // 2
        if alist[middle] == value:
            return True
        elif alist[middle] > value:
            upper_bound = middle - 1
        else:
            lower_bound = middle + 1
    return False
```

Připomenutí: výpočet odmocniny

```
def square_root(x, precision=0.01):
    upper = x
    lower = 0
    middle = (upper + lower) / 2
    while abs(middle**2 - x) > precision:
        if middle**2 > x:
            upper = middle
        if middle**2 < x:
            lower = middle
        middle = (upper + lower) / 2
    return middle
```

Vyhledávání, přidávání, ubírání

- seřazený seznam – rychlé vyhledávání, ale pomalé přidávání prvků
- rychlé vyhledávání, přidávání i ubírání prvků – datová struktura slovník; vyhledávací stromy, hašovací tabulky
- více později / v IB002



T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein: Introduction to Algorithms.

Řadicí algoritmy: terminologická poznámka

- anglicky „sorting algorithm“
- česky používáno: řadicí algoritmy nebo třídicí algoritmy
- řadicí vesměs považováno za „správnější“

Řadicí algoritmy: komentář

- mnoho různých algoritmů pro stejný účel
- většina programovacích jazyků má vestavěnou podporu (funkce `sort()`)

Proč se tím tedy zabýváme?

Řadicí algoritmy: komentář

Proč se tím tedy zabýváme?

1. procvičení práce se seznamy
2. ilustrace algoritmického myšlení, technik návrhu algoritmů
3. typický příklad drobné změny algoritmu s velkým dopadem na rychlost programu
4. hezky se to vizualizuje a vysvětluje
5. tradice, patří to ke vzdělání informatika
6. občas se to může i hodit

Řadicí algoritmy: komentář

- zde důraz na jednoduché algoritmy, základní použití seznamů, intuici
- detailněji v IB002 Algoritmy a datové struktury I
  - pokročilejší algoritmy
  - důkazy korektnosti
  - složitost formálně

Doporučené zdroje

- `http://www.sorting-algorithms.com/`
  - animace
  - kódy
  - vizualizace
- `http://sorting.at/`
  - elegantní animace
- více podobných: Google → sorting algorithms
- a na zpestření:
  - xkcd Ineffective Sorts: `https://xkcd.com/1185/`
  - Bubble-sort with Hungarian folk dance:

    `http://www.youtube.com/watch?v=lyZQPjUT5B4`

Řadicí algoritmy: problém

- vstup: posloupnost (přirozených) čísel
  např. 8, 2, 14, 3, 7, 9
- výstup: seřazená posloupnost
  např. 2, 3, 7, 8, 9, 14

pozn. většina zmíněných algoritmů aplikovatená nejen na čísla, ale na „cokoliv, co umíme porovnávat“

Pokus č. 1

- zkoušíme systematicky všechna možná uspořádání prvků
- pro každé z nich ověříme, zda jsou prvky korektně uspořádány
- je to dobrý algoritmus?

Co vy na to?

- zkuste vymyslet
  - řadicí algoritmus
  - co nejvíce různých principů
  - co nejefektivnější algoritmus
- možná inspirace: jak řadíte karty?

Složitost

n – délka vstupní posloupnosti

	počet operací
jednoduché algoritmy	$O(n^2)$
složitější algoritmy	$O(n \log(n))$

Bublinkové řazení (Bubble sort)

- „probublávání“ vyšších hodnot nahoru
- srovnávání a prohazování sousedů
- po i iteracích je nejvyšších i členů na svém místě

Bublinkové řazení: program

```
def bubble_sort(a):
    n = len(a)
    for i in range(n):
        for j in range(n-i-1):
            if a[j] > a[j+1]:
                tmp = a[j]
                a[j] = a[j+1]
                a[j+1] = tmp
```

invariant cyklu: `a[n-i-1:]` ve finální pozici

Bublinkové řazení: příklad běhu

```
[8, 2, 7, 14, 3, 1]
[2, 7, 8, 3, 1, 14]
[2, 7, 3, 1, 8, 14]
[2, 3, 1, 7, 8, 14]
[2, 1, 3, 7, 8, 14]
[1, 2, 3, 7, 8, 14]
```

Implementační detail: prohazování prvků

- prohození hodnot dvou proměnných `a`, `b`
- na slidech psáno „běžným“ způsobem pomocí pomocné proměnné: `t = a; a = b; b = t`
- Python umožňuje zápis: `a, b = b, a`

Řazení výběrem (Select sort)

- řazení výběrem
- projdeme dosud neseřazenou část seznamu a vybereme nejmenší prvek
- nejmenší prvek zařadíme na aktuální pozici (výměnou)

Řazení výběrem: program

```
def select_sort(a):
    for i in range(len(a)):
        selected = i
        for j in range(i+1, len(a)):
            if a[j] < a[selected]: selected = j
        tmp = a[i]
        a[i] = a[selected]
        a[selected] = tmp
```

Řazení vkládáním (Insert sort)

- podobně jako „řazení karet“
- prefix seznamu udržujeme seřazený
- každou další hodnotu zařadíme tam, kam patří

Řazení vkládáním: program

```
def insert_sort(a):
    for i in range(1,len(a)):
        current = a[i]
        j = i
        while j > 0 and a[j-1] > current:
            a[j] = a[j-1]
            j -= 1
        a[j] = current
```

Význam proměnných

- proměnná `selected` u řazení výběrem
  - index vybraného prvku
  - používáme k indexování, `a[selected]`
- proměnná `current` u řazení vkládáním
  - hodnota „posunovaného“ prvky
  - `a[j] = current`
- v našich případech mají stejný typ (`int`), ale jiný význam a použití (záměna = častý zdroj chyb)
- zřejmější pokud řadíme řetězce

Quicksort

- rekurzivní algoritmus
- vybereme „pivota“ a seznam rozdělíme na dvě části:
  - větší než pivot
  - menší než pivot
- obě části pak nezávisle seřadíme (rekurzivně pomocí quicksortu)
- pokud máme smůlu při výběru pivota, tak je stejně pomalý jako předchozí
- v průměrném případě je rychlý – *quick*
  $O(n \log(n))$

Řazení slučováním (Merge sort)

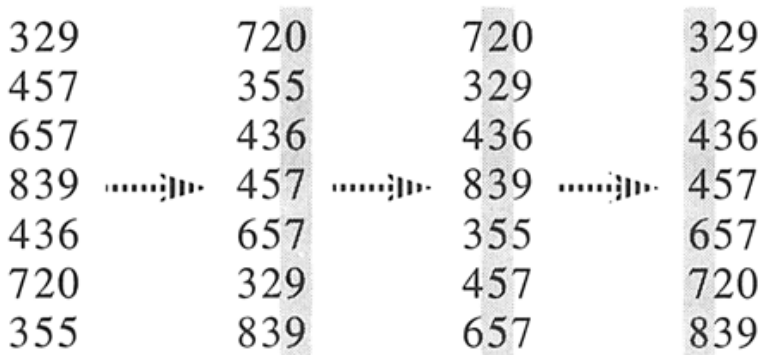
- rekurzivní algoritmus
- seznam rozdělíme na dvě poloviny a ty seřadíme (pomocí Merge sort)
- ze seřazených polovin vyrobíme jeden seřazený seznam – „zipování“
- vždy efektivní – $O(n \log(n))$

Specifické předpoklady – efektivnější algoritmus

- předchozí algoritmy využívají pouze operaci porovnání dvou hodnot
- aplikovatelné na cokoliv, co lze porovnávat, žádné další předpoklady
- s doplňujícími předpoklady můžeme dostat nové algoritmy (obecný princip)
- řazení (krátkých) čísel $\rightarrow$ Radix sort

Radix sort

- seznam („krátkých“) čísla
- postupujeme od nejméně významné cifry k nejvýznamnější
- seřadíme čísla podle dané cifry = rozdělení do 10 „kyblíčků“ (jednoduché, rychlé)



T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein: Introduction to Algorithms.

Složitost trochu podrobněji

- složitost algoritmu – jak je algoritmus výpočetně náročný
- časová, prostorová
- měříme počet operací, nikoliv čas na konkrétním stroji
- vyjadřujeme jako funkci délky vstupu
- O notace – zanedbáváme konstanty
- např. $O(n)$, $O(n \log(n))$, $O(n^2)$

Ilustrace rozdílů v složitosti

n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	n^3	2^n
8	3 nsec	0.01 μ	0.02 μ	0.06 μ	0.51 μ	0.26 μ
16	4 nsec	0.02 μ	0.06 μ	0.26 μ	4.10 μ	65.5 μ
32	5 nsec	0.03 μ	0.16 μ	1.02 μ	32.7 μ	4.29 sec
64	6 nsec	0.06 μ	0.38 μ	4.10 μ	262 μ	5.85 cent
128	0.01 μ	0.13 μ	0.90 μ	16.38 μ	0.01 sec	10^{20} cent
256	0.01 μ	0.26 μ	2.05 μ	65.54 μ	0.02 sec	10^{58} cent
512	0.01 μ	0.51 μ	4.61 μ	262.14 μ	0.13 sec	10^{135} cent
2048	0.01 μ	2.05 μ	22.53 μ	0.01 sec	1.07 sec	10^{598} cent
4096	0.01 μ	4.10 μ	49.15 μ	0.02 sec	8.40 sec	10^{1214} cent
8192	0.01 μ	8.19 μ	106.50 μ	0.07 sec	1.15 min	10^{2447} cent
16384	0.01 μ	16.38 μ	229.38 μ	0.27 sec	1.22 hrs	10^{4913} cent
32768	0.02 μ	32.77 μ	491.52 μ	1.07 sec	9.77 hrs	10^{9845} cent
65536	0.02 μ	65.54 μ	1048.6 μ	0.07 min	3.3 days	10^{19709} cent
131072	0.02 μ	131.07 μ	2228.2 μ	0.29 min	26 days	10^{39438} cent
262144	0.02 μ	262.14 μ	4718.6 μ	1.15 min	7 mnths	10^{78894} cent
524288	0.02 μ	524.29 μ	9961.5 μ	4.58 min	4.6 years	10^{157808} cent
1048576	0.02 μ	1048.60 μ	20972 μ	18.3 min	37 years	10^{315634} cent

Table 1.1 Running times for different sizes of input. "nsec" stands for nanoseconds, "μ" is one microsecond and "cent" stands for centuries.

M. H. Alsuwaiyel: Algorithms, Design Techniques and Analysis.

Složitost řadicích algoritmů

n – délka vstupní posloupnosti

	počet operací
jednoduché algoritmy	$O(n^2)$
složitější algoritmy	$O(n \log(n))$

Python: Seznam funkcí

Pro zajímavost: v Pythonu můžeme mít třeba i seznam funkcí

```
def test_sorts():
  for sort in [bubble_sort, insert_sort, select_sort]:
    a = [41, 71, 46, 15, 97, 44, 30, 11]
    sort(a)
    print(a)
```

Vyhledávání a řazení v Pythonu

- `x in alist` – test přítomnosti `x` v seznamu
- `alist.index(x)` – pozice `x` v seznamu
- `alist.count(x)` – počet výskytů `x` v seznamu
- `alist.sort()` – seřadí položky seznamu
- `sorted(alist)` – vrátí seřazené položky seznamu (ale nezmění vlastní proměnnou)

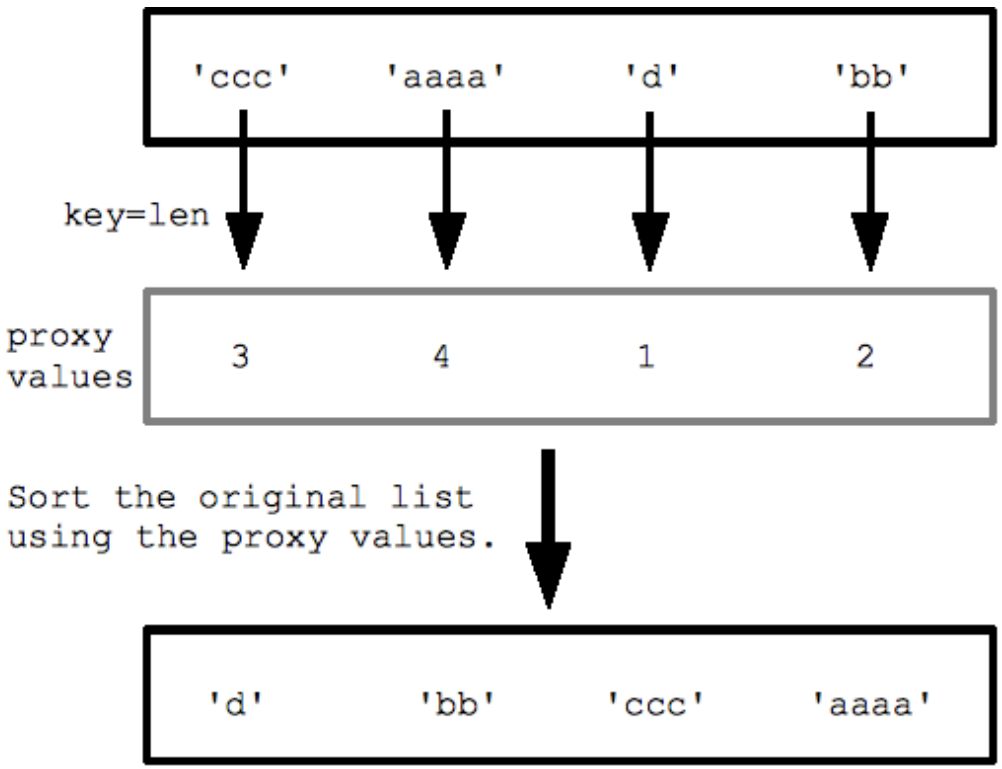
pro řazení používá Python Timsort – kombinaci řazení slučováním a vkládáním

Různé způsoby řazení

```
s = ["prase", "Kos", "ovoce", "Pes", "koza",
     "ovce", "kokos"]

print(sorted(s))
print(sorted(s, reverse=True))
print(sorted(s, key=str.lower))
print(sorted(s, key=len))
print(sorted(s, key=lambda x: x.count("o")))
```

Řazení za využití key



https://developers.google.com/edu/python/sorting

Řazení v Pythonu: poznámky

ukázky `sorted`:

- `reverse`, `key` – pojmenované argumenty
- parametrem funkce (`key`) je funkce
  - vestavěná funkce: `len`, `str.lower`
  - vlastní funkce: `count_letter_o`, `get_third_letter`
  - „anonymní“ lambda funkce: `lambda x: x.count("o")`

praktické použití:

- příklad: seřazení jmen studentů podle bodů na písemce
- využití dalších datových struktur, ukázky později

Unikátní prvky, nejčastější prvek

- máme seznam prvků, např. výsledky dotazníku (oblíbený programovací jazyk):
  `["Python", "Java", "C", "Python", "PHP", "Python", "Java", "JavaScript", "C", "Pascal"]`
- chceme:
  - seznam unikátních hodnot
  - nejčastější prvek

Unikátní prvky, nejčastější prvek

- máme seznam prvků, např. výsledky dotazníku (oblíbený programovací jazyk):
  `["Python", "Java", "C", "Python", "PHP", "Python", "Java", "JavaScript", "C", "Pascal"]`
- chceme:
  - seznam unikátních hodnot
  - nejčastější prvek
- přímočaře: opakované procházení seznamu
- efektivněji: seřadit a pak jednou projít
- elegantněji: využití pokročilých datových struktur / konstrukcí

Unikátní prvky

```
def unique(alist):
    alist = sorted(alist)
    # rozdilne chovani od alist.sort() !!
    result = []
    for i in range(len(alist)):
        if i == 0 or alist[i-1] != alist[i]:
            result.append(alist[i])
    return result
```

```
def unique(alist):
    return list(set(alist))
```

Nejčastější prvek přímočaře

```
def most_common(alist):
    alist = sorted(alist)
    max_value, max_count = None, 0
    current_value, current_count = None, 0
    for value in alist:
        if value == current_value:
            current_count += 1
        else:
            current_value = value
            current_count = 1
        if current_count > max_count:
            max_value = current_value
            max_count = current_count
    return max_value
```

Nejčastější prvek sofistikovaněji

```
def most_common(alist):
    return max(alist, key=alist.count)
```

Stack Overflow diskuze:

`http://stackoverflow.com/questions/1518522/python-most-common-element-in-a-list`

Přesmyčky

- přesmyčky = slova poskládaná ze stejných písmen
- úkol: rozpoznat, zda dvě slova jsou přesmyčky
- vstup: dva řetězce
- výstup: True/False
- příklady:
  - odsun, dusno $\rightarrow$ True
  - kostel, les $\rightarrow$ False
  - houslista, souhlasit $\rightarrow$ True
  - ovoce, ovace $\rightarrow$ False

Přesmyčky řešení

- seřadíme písmena obou slov
- přesmyčky $\Leftrightarrow$ po seřazení identické
- implementace za využití `sorted` přímočará

```
def anagram(word1, word2):
    return sorted(word1) == sorted(word2)
```

Reklama na řazení

řazení:

- velmi častý dílčí krok při programování
- i když to na první pohled nemusí být vidět
- vhodné uspořádání výstupů programu
  - a koření v supermarketu!

a taky se hodí, když jste krab: `https://www.youtube.com/watch?v=f1dnocPQXDQ`

Shrnutí

- vyhledávání: půlení intervalu
- řadicí algoritmy:
  - jednoduché (kvadratické): bublinkové, výběrem, vkládáním
  - složitější ($n \cdot \log(n)$, rekurzivní): quick sort, slučování
- praktické použití řazení
- příklady