Algebra I – podzim 2017 – 2. termín

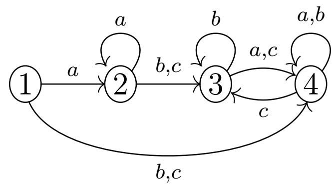
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \oplus, *)$, kde $\oplus$ a $*$ jsou operace definované předpisy

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) * (c, d) = (-ad - bc, ac - bd),$$

pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, je okruh a zda je to obor integrity.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f & h \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{Z}[x],\ h \in \mathbb{R}[x],\ x^2 + 1 \text{ dělí } f \right\},$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f & h \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; f(2) = g(2),\ f \text{ má kořen } 3,\ h \text{ má kořen } \mathrm{i} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt{2} + \sqrt[8]{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo $\frac{1}{\alpha^3+2\alpha^2+4}$, kde α splňuje $\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 8\alpha = -2$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G, která obsahuje právě 44 prvků x takových, že x generuje G.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G a injektivního homomorfismu $\varphi\colon G \to G$, který není izomorfismus.

8. **(5 bodů)** Definujte nerozložitelný prvek oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující nerozložitelné polynomy nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že každý ideál okruhu polynomů nad tělesem je hlavní.