IB102 - Ukázková úloha: Myhillova-Nerodova věta

Zadání

U následujících jazyků rozhodněte, zda jsou regulární. Své tvrzení dokažte pomocí Myhillovy-Nerodovy věty

1. $L = \{w \in \{a,b,c\}^* | \#_a(w) = \#_b(w) \quad \wedge \quad \#(a) \equiv 1 \pmod 2\}$
2. $L = \{w \in \{a,b,c\}^* | \#_a(w) = \#_b(w) \quad \vee \quad \#(a) \equiv 1 \pmod 2\}$

Řešení

V obou případech jde o neregulární jazyky:

1. Uvažme nekonečnou množinu slov

$$M = \{a^{2m+1} | m \in \mathbb{N}\}.$$

Dokažme, že žádná dvě různá slova z M spolu neleží ve stejné třídě v rozkladu $\{a,b,c\}^*$ podle $\sim_L$. Uvažme dvě různá slova u, v z množiny M :

$$\begin{aligned} u &= a^{2k+1}, \\ v &= a^{2l+1}, \end{aligned}$$

kde $k \neq l$ jsou přirozená a předpokládejme pro spor, že $u \sim_L v$. Potom dle definice $\sim_L$ pro každé $w \in \{a,b,c\}^*$ platí

$$a^{2k+1}w \in L \iff a^{2l+1}w \in L.$$

Speciálně tedy volbou $w = b^{2k+1}$ dostáváme

$$a^{2k+1}b^{2k+1} \in L \iff a^{2l+1}b^{2k+1} \in L,$$

což je ovšem spor, protože $a^{2k+1}b^{2k+1} \in L$ a zároveň $a^{2l+1}b^{2k+1} \notin L$

Sporem jsme ukázali, že každé ze slov v množině M leží v jiné třídě rozkladu $\Sigma^* / \sim_L$. Proto má prefixová ekvivalence $\sim_L$ nekonečný index a L musí být podle Myhillovy-Nerodovy věty neregulární.

Poznamenejme, že stejnou práci by odvedlo lemma o vkládání pro slova $a^{2n+1}b^{2n+1}$ a index $i = 0$.

2. Velice podobně, jen pro množinu

$$M = \{a^{2m} | m \in \mathbb{N}\}.$$

Uvažme dva její různé prvky u, v :

$$\begin{aligned} u &= a^{2k}, \\ v &= a^{2l}, \end{aligned}$$

kde $k \neq l$ jsou přirozená a předpokládejme pro spor, že $u \sim_L v$. Potom dle definice pro každé $w \in \{a, b, c\}^*$ platí

$$a^{2k}w \in L \iff a^{2l}w \in L.$$

Speciálně tedy volbou $w = b^{2k}$ dostáváme

$$a^{2k}b^{2k} \in L \iff a^{2l}b^{2k} \in L,$$

což je ovšem spor, protože $a^{2k}b^{2k} \in L$ a zároveň $a^{2l}b^{2k} \notin L$.

Sporem jsme ukázali, že každé ze slov v množině M leží v jiné třídě rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$. Proto má prefixová ekvivalence $\sim_L$ nekonečný index a L musí být podle Myhillovy-Nerodovy věty neregulární.

Stejnou práci by odvedlo Pumping lemma pro slovo $b^{2n}a^{2n}$ a $i = 0$, nebo slova $a^{2n}b^{2n}$ a $i = 3$. V obou případech zůstane po napumpování počet písmen a sudý. Navíc bude různý od počtu písmen b a tak po napumpování vypadne z jazyka L.