

FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I

Řešení sady problémů 3.

1. Automat A_1 obsahuje nedosažitelný stav q_9 . Při aplikaci algoritmu pro minimalizaci konečného automatu obdržíme postupně následující třídy ekvivalentních stavů:

- $I = \{q_0, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_{10}\}$
 $II = \{q_1, q_8\}$
- $I_1 = \{q_0, q_2\}$
 $I_2 = \{q_3, q_4, q_6, q_{10}\}$
 $I_3 = \{q_5, q_7\}$
 $II = \{q_1, q_8\}$
- $I_1 = \{q_0, q_2\}$
 $I'_2 = \{q_3\}$
 $I''_2 = \{q_4, q_6\}$
 $I'''_2 = \{q_{10}\}$
 $I_3 = \{q_5, q_7\}$
 $II = \{q_1, q_8\}$

Automat A_2 neobsahuje nedosažitelné stavy a je minimální. Po převedení obou automatů do kanonického tvaru obdržíme v obou případech následující automat:

$$K = [\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{1\}]$$

$$\begin{aligned}\delta(1, a) &= 2 \\ \delta(1, b) &= 3 \\ \delta(2, a) &= 4 \\ \delta(2, b) &= 1 \\ \delta(3, a) &= 1 \\ \delta(3, b) &= 5 \\ \delta(4, a) &= 6 \\ \delta(4, b) &= 2 \\ \delta(5, a) &= 3 \\ \delta(5, b) &= 6 \\ \delta(6, a) &= 6 \\ \delta(6, b) &= 6\end{aligned}$$

Tedy automaty A_1 a A_2 jsou ekvivalentní.

2. Deterministický konečný automat je určen následující tabulkou:

		a	b
→	0	0	01
	01	02	012
	02	03	013
	03	04	014
←	04	0	01
	012	023	0123
	013	024	0124
←	014	02	012
	023	034	0134
←	024	03	013
←	034	04	014
	0123	0234	01234
←	0124	023	0123
←	0134	024	0124
←	0234	034	0134
←	01234	0234	01234

3. Je třeba dokázat dvě inkluze:

$L(G) \subseteq L$:

Dokážeme, že pro libovolnou větnou formu w , kde $S \Rightarrow^* w$, platí: $2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$. Důkaz provedeme indukcí vzhledem k *délce odvození* větné formy w .

- **n=0:** - pak $w = S$ a $2(\#_A(S) + \#_a(S)) = 0 = \#_B(S) + \#_b(S)$.
- **indukční krok:** Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou větnou formu, jejíž délka odvození je n . Ukážeme, že pak toto tvrzení platí též pro každou větnou formu, která má délku odvození $n + 1$. Nechť w je větná forma o délce odvození $n + 1$ a nechť $S \Rightarrow v_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_n \Rightarrow w$ je její odvození v gramatice G . Větná forma v_n má délku odvození n , proto dle indukčního předpokladu platí:

$$2(\#_A(v_n) + \#_a(v_n)) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n)$$

Derivace $v_n \Rightarrow w$ vznikla aplikací jednoho z následujících pravidel:

– $S \rightarrow ABBS$ nebo $S \rightarrow ABB$.

Pak:

$$\#_A(w) + \#_a(w) = \#_A(v_n) + \#_a(v_n) + 1 \text{ a}$$

$$\#_B(w) + \#_b(w) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n) + 2 \text{ a tedy}$$

$$2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$$

– $AB \rightarrow BA$, $BA \rightarrow AB$, $A \rightarrow a$ nebo $B \rightarrow b$.

Pak:

$$\#_A(w) + \#_a(w) = \#_A(v_n) + \#_a(v_n) \text{ a}$$

$$\#_B(w) + \#_b(w) = \#_B(v_n) + \#_b(v_n), \text{ tedy}$$

$$2(\#_A(w) + \#_a(w)) = \#_B(w) + \#_b(w)$$

Každé slovo u jazyka $L(G)$ je větná forma, která neobsahuje neterminály. Proto $2 \cdot \#_a(u) = \#_b(u)$.

$L \subseteq L(G)$:

Nechť $u \in L$. Ukážeme, že slovo u lze odvodit v gramatice G . Nechť $n = \#_a(u)$. Pro odvození slova u v gramatice G nejprve aplikujeme $(n - 1)$ krát pravidlo $S \rightarrow ABBS$ a pak jedenkrát pravidlo $S \rightarrow ABB$. Obdržíme větnou formu $w = (ABB)^n$, pro niž platí $\#_A(w) = \#_a(u) \wedge \#_B(w) = \#_b(u)$. Nyní pomocí opakované aplikace pravidel $AB \rightarrow BA$ a $BA \rightarrow AB$ přepíšeme větnou formu w na větnou formu w' tak, aby platilo:

$\forall i \in N, 1 \leq i \leq 3n$: na i -tém místě ve slově u je $a \iff$
na i -tém místě ve větné formě w' je A

4. a) Necht' A je konečný automat s k stavy akceptující jazyk L .

' \implies ' Z nekonečnosti jazyka L plyne existence slova $w \in L$ délky $|w| \geq k$. Když $|w| < 2k$, tvrzení je dokázáno. Předpokládejme $|w| \geq 2k$. Na slovo w můžeme aplikovat pumping lemu. Ta zaručuje existenci slov v, x, y takových, že $x \neq \varepsilon$, $|x| \leq k$, $w = vxy$ a $vy \in L$. Délku slova vy můžeme ohraničit takto: $|w| - k \leq |vy| < |w|$. Nyní buď $|vy| < 2k$, anebo pro něj můžeme uvedenou úvahu zopakovat. Protože se vždy slovo zkrátí minimálně o jeden a maximálně o k symbolů, jeho délka po konečném počtě zkracování bude náležet do intervalu $< k, 2k)$ délky k .

' \impliedby ' Opačná inkluze plyne přímo z pumping lemy: současně se slovem w délky alespoň k musí L obsahovat slova $vx^i y$ pro všechna $i \geq 0$, přičemž $w = vxy$ a $x \neq \varepsilon$.

b) Tvrzení obecně neplatí. Jako protipříklad stačí vzít např. automat A akceptující jazyk $\{abc\}^*$; $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0\})$, kde $\delta(q_0, a) = q_1$, $\delta(q_1, b) = q_2$ a $\delta(q_2, c) = q_0$.